

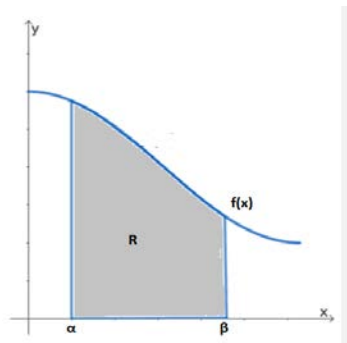
18. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ – Α μέρος

Α. ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

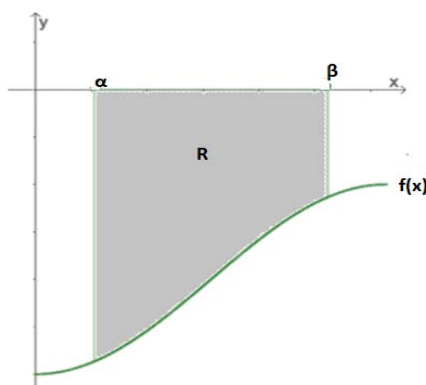
Θεωρία

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και R το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=α$ και $x=β$. Το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , υπολογίζεται ως εξής:

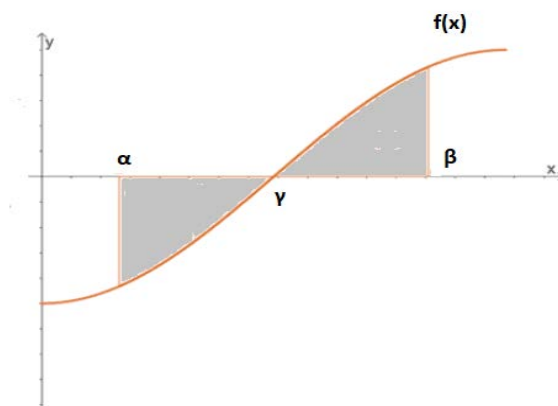
(α) Αν $f(x) \geq 0$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$



(β) Αν $f(x) \leq 0$ τότε $E(R) = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (0 - f(x)) dx$



(γ) Αν η $f(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$

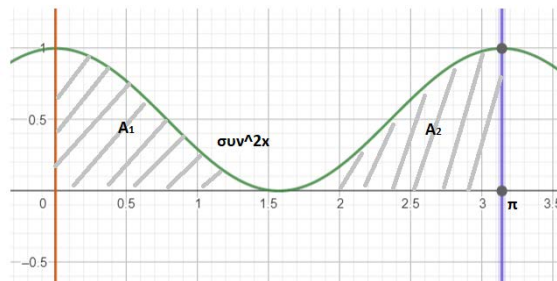


Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sin^2 x$, τις ευθείες $x=0$, $x=\pi$ και τον άξονα των x (οαχ').

Λύση

Το εμβαδόν του χωρίου:



υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα ($\sin^2 x \geq 0$):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \sin 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \sin 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{4} \eta\mu 2\pi - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{4} \eta\mu 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 1

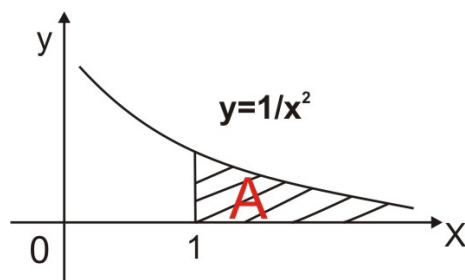
Λόγω συμμετρίας το εμβαδόν θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$A = 2A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

Εφαρμογή 2

Αν A είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την $y = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=1$, να βρεθεί το A .

Λύση



Έχουμε :

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} \, dx \quad (1)$$

Αλλά

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^{\beta} x^{-2} \, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^{\beta} = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{\beta} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\beta} = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{\beta}$$

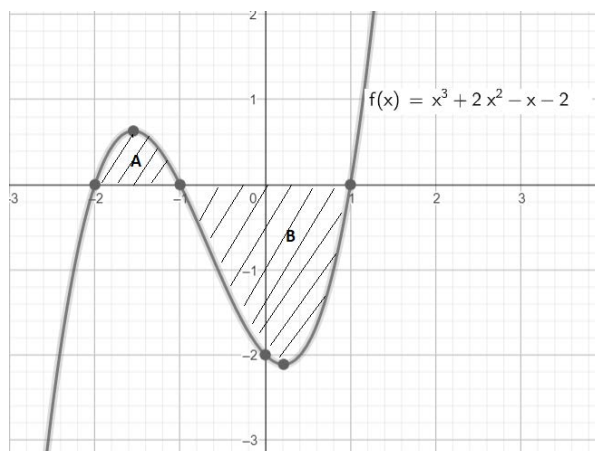
Άρα

$$(1) \Rightarrow A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) = 1 - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\beta} \right) = 1 - 0 = 1$$

■

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ και τον άξονα των x .



Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ τέμνει τον άξονα στα σημεία:

$$x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1, x=-2$$

Ακόμα, είναι φανερό, από το γράφημά της, ότι η f δεν είναι πάντα θετική. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^3+2x^2-x-2) dx &= \left. \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1^4}{4} + 2\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (x^3+2x^2-x-2) dx &= \left. \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-2}^{-1} = \\ &= \frac{(-1)^4}{4} + 2\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Τελικά

$$E = \int_{-2}^1 |f(x)| dx = \frac{5}{12} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{37}{12}$$

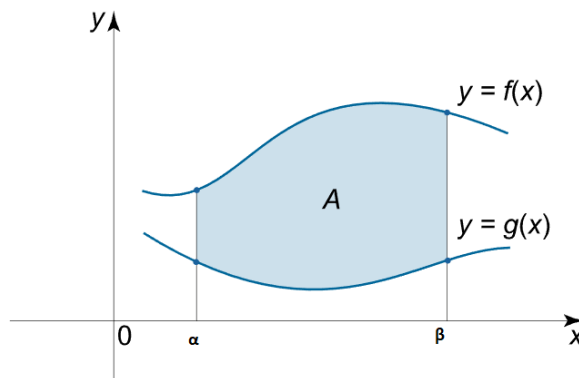
■

Παρατήρηση 2

- Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ δεν είναι πάντα ίσο με το εμβαδόν του χωρίου «κάτω» από το γράφημα της συνάρτησης f (τα δύο συμπίπτουν αν η συνάρτηση είναι μη-αρνητική).

2. Αν το χωρίο R περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, τότε το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , υπολογίζεται ως εξής

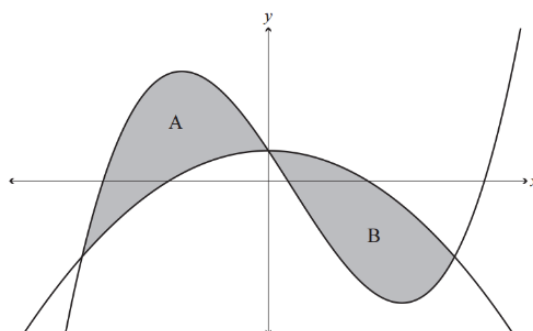
(α) Αν $f(x) \geq g(x)$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$



(β) Αν $f(x) \leq g(x)$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x)) dx$

(γ) Αν η διαφορά $f(x) - g(x) = h(x)$ **δεν** διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε

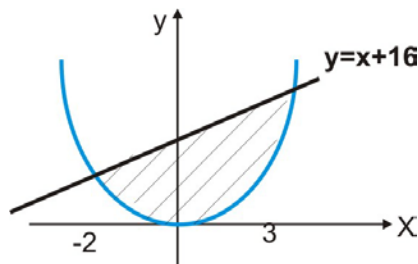
$$E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |h(x)| dx$$



Εφαρμογή 4

Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$ & $y=x+6$.

Λύση



Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$\left. \begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x+6 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\int_{-2}^3 (x+6) dx - \int_{-2}^3 x^2 dx$$

(«άνω συνάρτηση» - «κάτω συνάρτηση»)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^3 (x+6-x^2) = \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3} = \frac{27}{6} + \frac{114}{6} - \frac{16}{6} = \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 5

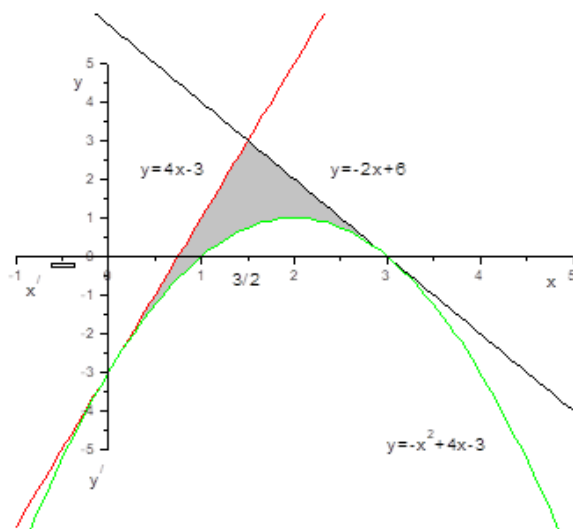
Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της παραβολής $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και των εφαπτόμενων της στα σημεία $(0, -3)$ και $(3, 0)$

Λύση

Για τον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $f(x)$ που διέρχονται από τα σημεία $(0, -3)$ και $(3, 0)$. Αυτές είναι της μορφής $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου $(x_0, f(x_0))$, και $f'(x_0)$ είναι η παράγωγος της παραβολής στο σημείο με τετμημένη x_0 .

Η $f'(x) = -2x + 4$, και στο σημείο $(0, -3)$ η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $f_1(x) = 4x - 3$, ενώ στο $(3, 0)$ γίνεται $f_2(x) = -2x + 6$.

Η τετμημένη του σημείου τομής των εφαπτόμενων είναι $3/2$.



Επειδή η f είναι άνω κοίλη ($f''(x) = -2 < 0$) οι εφαπτόμενες βρίσκονται πάνω από το γράφημά της. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το τμήμα που περιέχεται πάνω από την παραβολή και κάτω από την κάθε μία εφαπτόμενη. Αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \int_0^{3/2} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{3/2}^3 [(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3)] dx = \dots = \frac{9}{4}$$

■

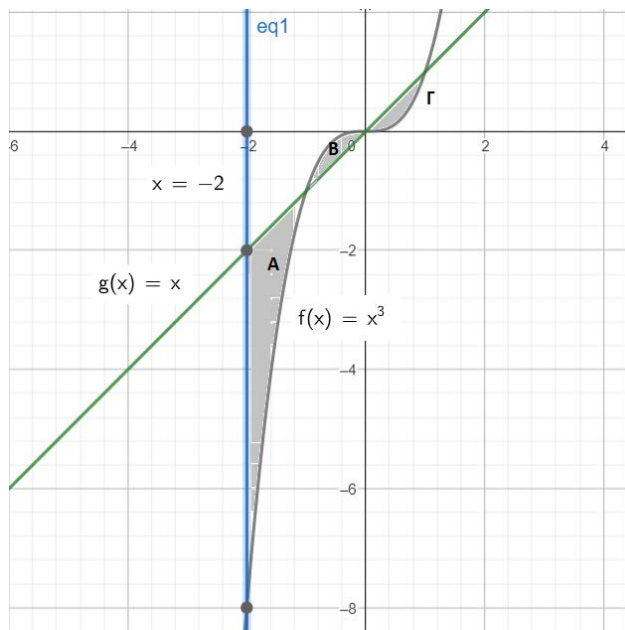
Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ και την ευθεία $x = -2 (= h(x))$.

Λύση

Οι καμπύλες f , g τέμνονται στα σημεία:

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = 0$$



Σχχεδιάζοντας το γράφημα των συναρτήσεων, μπορούμε να δούμε ότι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} (x - x^3) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

■

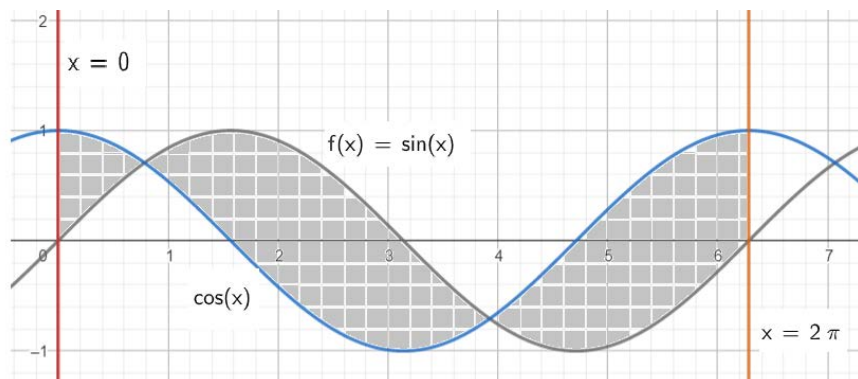
Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, και των ευθειών $x = 0$, $x = 2\pi$.

Λύση

Οι καμπύλες f , g τέμνονται στα σημεία:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad x = \frac{5\pi}{4}$$



Σχχεδιάζοντας το γράφημα των συναρτήσεων, μπορούμε να δούμε ότι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x)-f(x)) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(x)-g(x)) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (g(x)-f(x)) \, dx$$

Επομένως:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \, dx$$

Οπότε

$$\begin{aligned} E &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \\ &= \eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} - \eta\mu \frac{5\pi}{4} + \\ &\quad + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + \eta\mu \frac{\pi}{4} + \eta\mu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 2\pi - \eta\mu \frac{5\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

■

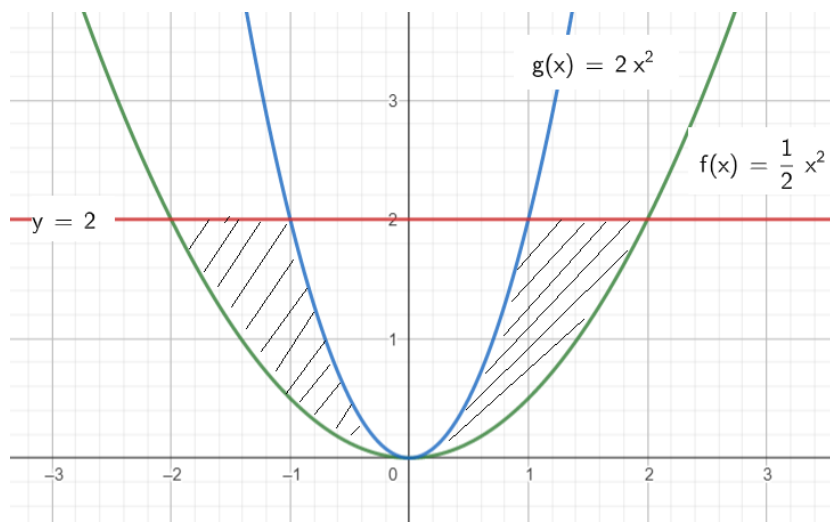
Εφαρμογή 8 (ολοκλήρωση ως προς y)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = 2x^2$ και της ευθείας $y = 2$.

Λύση

Κάνοντας τη γραφική παράσταση των τριών συναρτήσεων έχουμε το παρακάτω σχήμα. Λόγω συμμετρίας είναι αρκετό να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο

1^ο τεταρτημόριο. Οι καμπύλες $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $y = 2$ τέμνονται στα σημεία $x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ενώ οι $g(x) = 2x^2$, $y = 2$ στα σημεία $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.



1^{ος} τρόπος (ολοκλήρωση ως προς x)

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + 4 - \frac{8}{6} - 2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Τέλος, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E = 2E_1 = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

2^{ος} τρόπος (ολοκλήρωση ως προς y)

Μερικές φορές είναι ευκολότερο να ολοκληρώσουμε ως προς y, δηλαδή να θεωρήσουμε το y σα μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τις συναρτήσεις $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2y}$ και

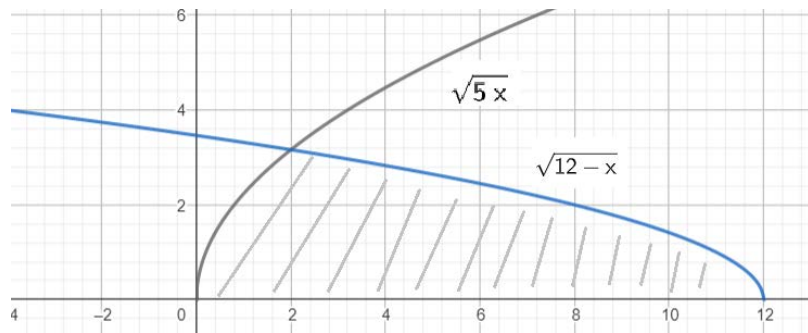
$y = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}$. Και πάλι, το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^2 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y} \right) dy = \int_0^2 \left(\sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{2}} \right) dy = \left(\sqrt{2} \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \sqrt{2} \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή

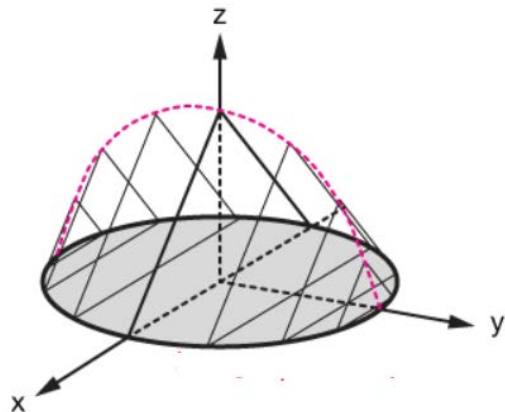
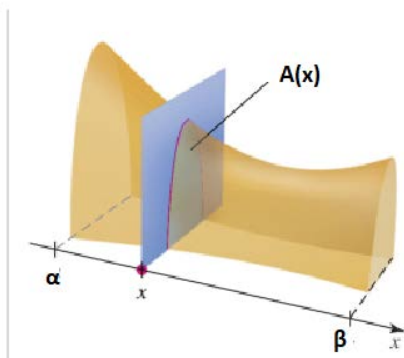
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \sqrt{5x}$, $g(x) = \sqrt{12-x}$ και του άξονα των x.



Β. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

(Ι) ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού (δείτε τα παρακάτω σχήματα), το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: το κάθετο επίπεδο στον x -άξονα (xOx'), σε ένα σημείο του με τετμημένη x ($x \in [a, \beta]$), τέμνει το στερεό (διατομή) σ' ένα επίπεδο χωρίο $R(x)$ του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με $A(x)$.

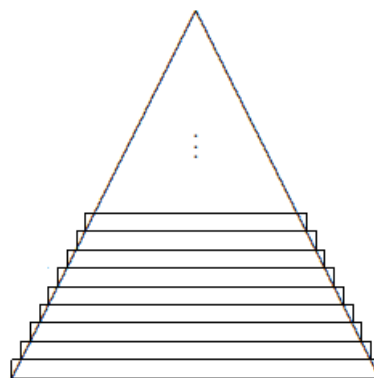
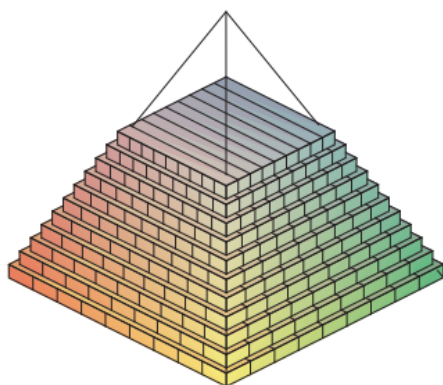


Αποδεικνύεται ότι ο όγκος του στερεού αυτού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \int_a^{\beta} A(x) dx$$

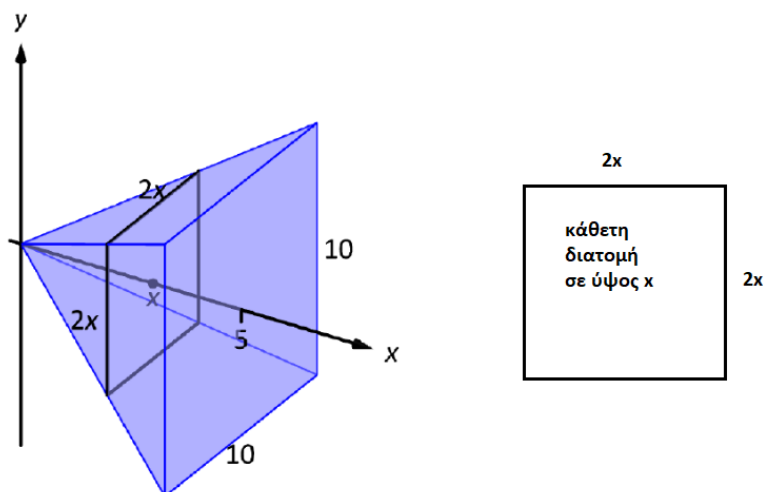
Εφαρμογή 9

Μία (τετραγωνική) πυραμίδα με ύψος 5m έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 10m. Η κάθετη διατομή της πυραμίδας σε απόσταση x m από την κορυφή, είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $2x$ m. Να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας.



Λύση

Σχεδιάζοντας την πυραμίδα, σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (δείτε το παρακάτω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή της σε απόσταση x m από την κορυφή, είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $2x$ m.



Επομένως το εμβαδόν της διατομής (στο σημείο αυτό) είναι ίσο με:

$$A(x) = 2x \cdot 2x = 4x^2$$

Ο όγκος της πυραμίδας δίνεται (σύμφωνα με τα παραπάνω) από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_0^5 A(x) dx = \int_0^5 4x^2 dx = 4 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5 = 4 \frac{5^3}{3} = \frac{500}{3}$$

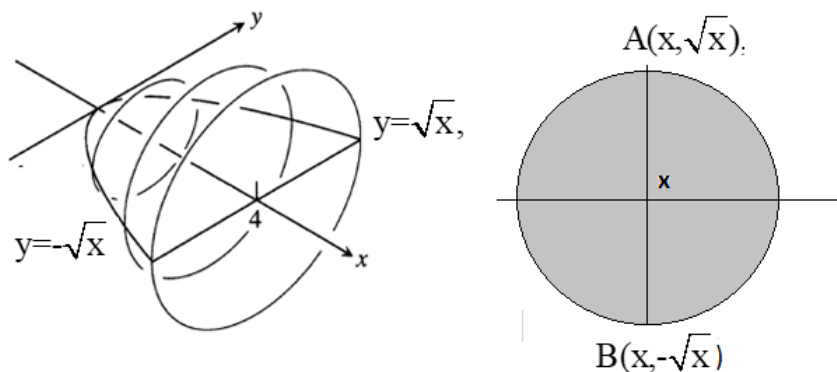
■

Παρατήρηση 3

Είναι γνωστό ότι, ο όγκος μίας πυραμίδας με εμβαδόν βάσης B και ύψος h δίνεται από τον τύπο $V = \frac{1}{3}Bh$, οπότε εδώ: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}10 \cdot 10 \cdot 5 = \frac{500}{3}$ που συμφωνεί με το αποτέλεσμα της εφαρμογής.

Εφαρμογή 10

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι κυκλικοί δίσκοι κάθετοι στον x -άξονα (xOx'), με μιά διάμετρο στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα άκρα της να βρίσκονται στις παραβολές $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$ και $0 \leq x \leq 4$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Λύση

Σχεδιάζοντας το στερεό (δείτε το παραπάνω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή του σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων, είναι ένας κυκλικός δίσκος κάθετος στον x -άξονα και ακτίνα ίση με $r = \sqrt{x}$.

Επομένως το εμβαδόν της διατομής (στο σημείο αυτό) είναι ίσο με:

$$A(x) = \pi r^2 = \pi (\sqrt{x})^2 = \pi x$$

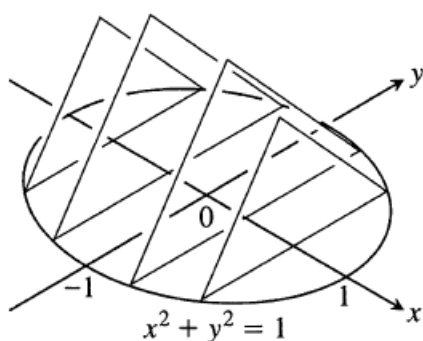
Ο όγκος του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_0^4 A(x) dx = \int_0^4 \pi x dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi$$

■

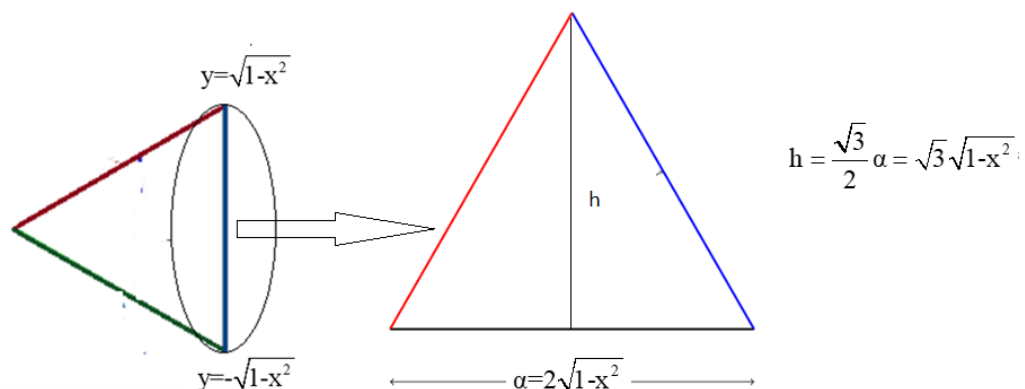
Εφαρμογή 11

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι ισόπλευρα τρίγωνα με μιά πλευρά κάθετη στον x -άξονα, και τα δύο άκρα της (πλευράς) να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Λύση

Σχεδιάζοντας το στερεό (δείτε το παραπάνω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή του σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων ($-1 \leq x \leq 1$), είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μία πλευρά κάθετη στον x -άξονα, και τα άκρα της (πλευράς) να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Η πλευρά του τριγώνου θα έχει μήκος: $\alpha = \sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) = 2\sqrt{1-x^2}$. Αλλά το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α είναι ίσο με $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$, οπότε εδώ $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.



Επομένως το εμβαδόν της (τριγωνικής) διατομής (στο σημείο x) είναι ίσο με:

$$A(x) = \frac{1}{2} \alpha h = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{2} \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

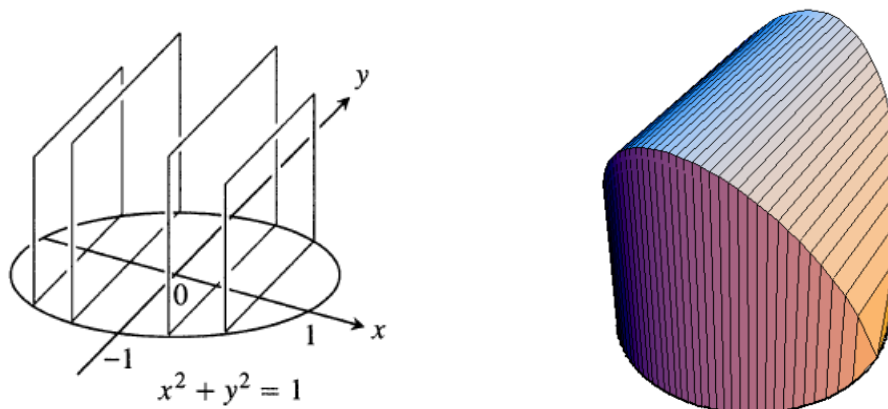
Ο όγκος του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

■

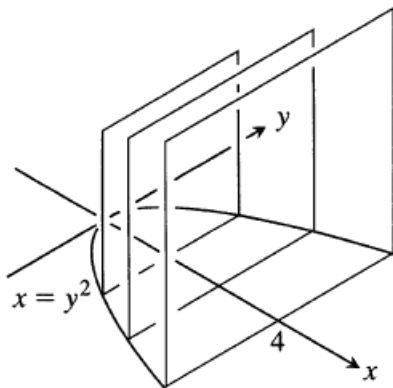
Εφαρμογή

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι τετράγωνα κάθετα στον x -άξονα, με μία πλευρά στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα δύο άκρα της να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Εφαρμογή

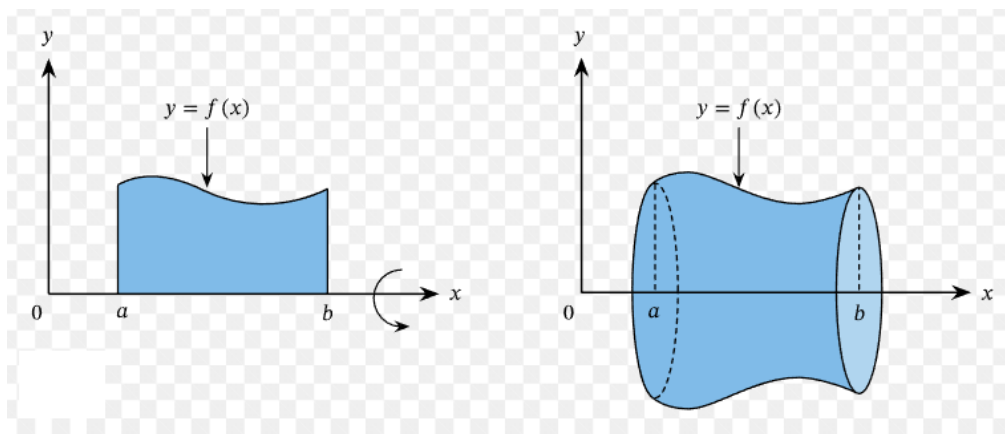
Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι τετράγωνα κάθετα στον x -άξονα, με μία πλευρά στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα άκρα της να βρίσκονται στις παραβολές $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$ και $0 \leq x \leq 4$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



(II) Όγκος στερεού εκ περιστροφής

(α) ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ γύρω από τον x -άξονα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι η εν λόγω συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν το χωρίο R που περικλείεται από το γράφημα της τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$,



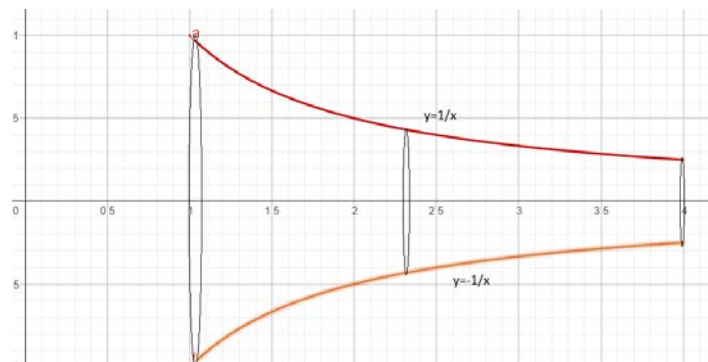
περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x , δημιουργεί ένα στερεό του οποίου ο **όγκος** είναι ίσος με:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Εφαρμογή 12

Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 4$ γύρω από τον άξονα των x .

Λύση



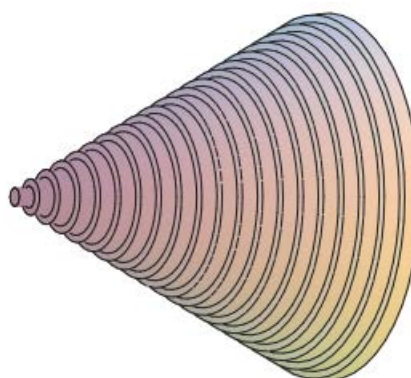
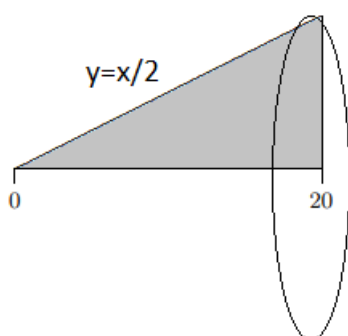
Ο όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_1^4 \pi y^2 dx = \int_1^4 \pi \frac{1}{x^2} dx = \int_1^4 \pi x^{-2} dx = \pi \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^4 = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^4 = -\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4} \pi$$

■

Εφαρμογή 13

Υπολογίστε τον όγκο ορθού κυκλικού κώνου με ακτίνα βάσης 10 και ύψος 20.



Λύση

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το στερεό προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου, γύρω από τον άξονα των x , που περικελιεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{2}x$ και τον άξονα των x με $0 \leq x \leq 20$.

Ο συγκεκριμένος όγκος V είναι ίσος με:

$$V = \pi \int_0^{20} \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^{20} = \frac{2000\pi}{3}$$

Παρατήρηση

(I) Εάν ο κώνος έχει τυχούσα ακτίνα βάσης r και ύψος h τότε αποδείξτε όπως παραπάνω ότι, ο όγκος του κώνου δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(II) Εάν εφαρμόσουμε τον τύπο του (1) στην παραπάνω εφαρμογή, τότε έχουμε:

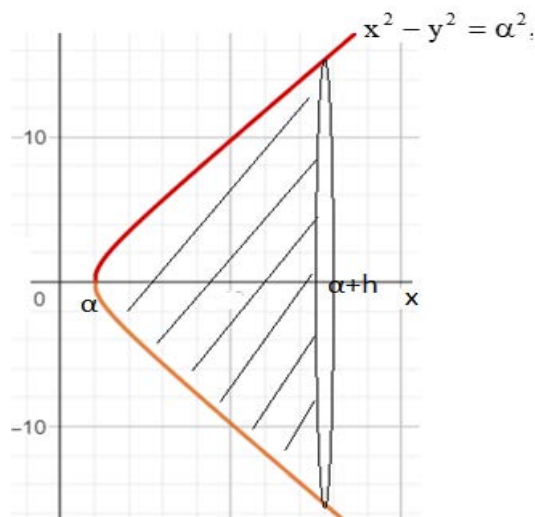
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = \frac{2000\pi}{3}$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με αυτό που υπολογίσαμε.

Εφαρμογή 14

Το τμήμα του xy -επιπέδου που περικλείεται από την υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$, $\alpha > 0$, $x > 0$ και την ευθεία $x = \alpha + h$, $h > 0$ περιστρέφεται γύρω από τον x -άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x .

Λύση



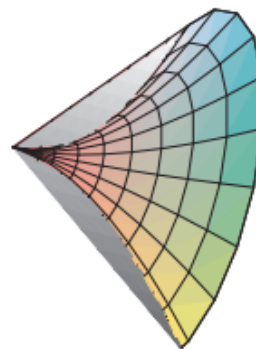
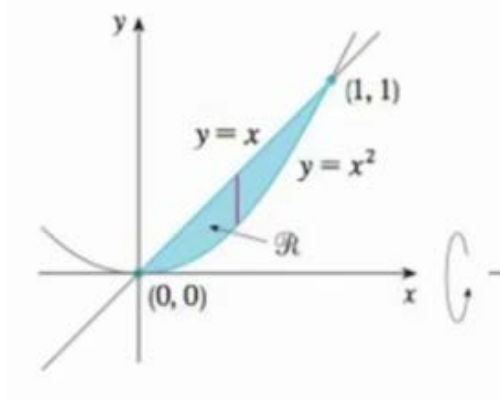
Ο συγκεκριμένος όγκος V είναι:

$$V = \int_{\alpha}^{\alpha+h} \pi(x^2 - \alpha^2) dx = \frac{\pi}{3} [(\alpha+h)^3 - \alpha^3] - \pi\alpha^2 h = \frac{\pi}{3} (3\alpha^2 h + 3\alpha h^2 + h^3) - \pi\alpha^2 h = \frac{\pi h^2}{3} (3\alpha + h)$$

■

Εφαρμογή 15

Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ περιστρέφεται γύρω από τον x -άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή που δημιουργείται.

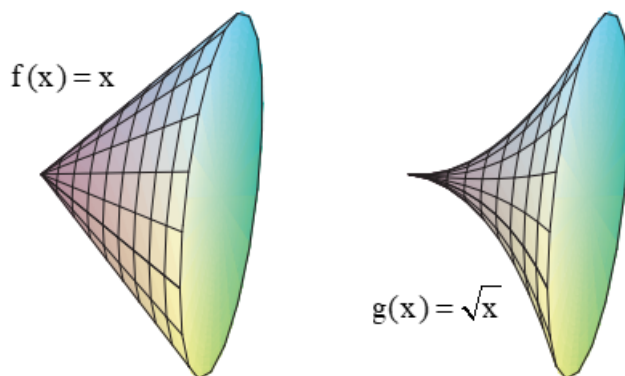


Λύση

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$$

Ο όγκος του ζητούμενου στερεού υπολογίζεται ως εξής: από τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε το χωρίο που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $f(x) = x$ (με $0 \leq x \leq 1$) και πάνω από τον x -άξονα θα αφαιρέσουμε τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε το χωρίο που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $g(x) = x^2$ και πάνω από τον x -άξονα.



Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2 - \pi (x^2)^2 \right) dx = \left(\frac{\pi x^3}{3} - \frac{\pi x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

■

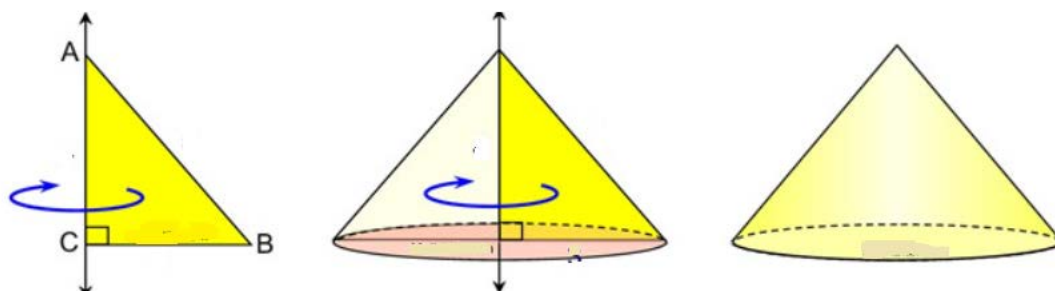
(β) ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ γύρω από τον άξονα $x=c$ και τον y -άξονα.

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται κάτω από το γραφικό της γύρω από την ευθεία (άξονα) $x = c$, $c < \alpha$, τότε αποδεικνύεται ότι: ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi(x-c)f(x)dx$$

Στην περίπτωση που περιστρέφουμε το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες $y=f(x)$ (πάνω καμπύλη) και $y=g(x)$ κάτω καμπύλη, τότε ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi(x-c)(f(x)-g(x))dx$$



(Περιστροφή γύρω από τον y-άξονα) Εάν $x = 0$ τότε έχουμε περιστροφή γύρω από τον y-άξονα, και ο όγκος του στερεού που προκύπτει δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x f(x) dx$$

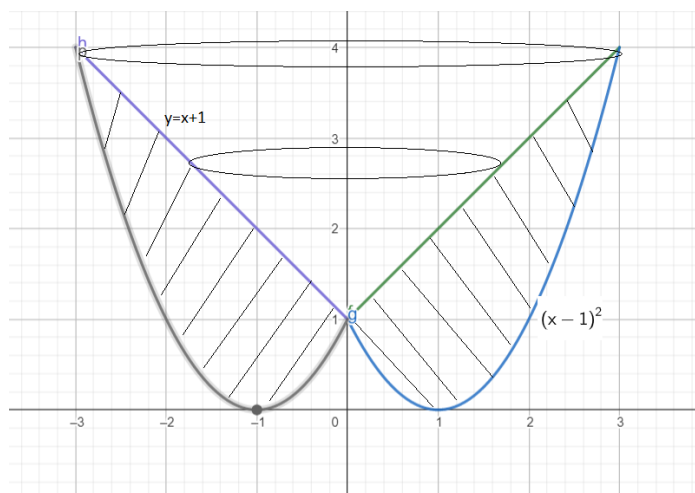
Στην περίπτωση που περιστρέφουμε το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = f(x)$ (πάνω καμπύλη) και $y = g(x)$ (κάτω καμπύλη), γύρω από τον y-άξονα, τότε ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x (f(x) - g(x)) dx$$

Εφαρμογή 16

Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$ περιστρέφεται γύρω από τον y-άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού, από περιστροφή, που δημιουργείται.

Λύση



Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$x + 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$$

Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_0^3 2\pi x \left((x+1) - (x-1)^2 \right) dx = \int_0^3 2\pi (-x^3 + 3x^2) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27\pi}{2}$$

■

Εφαρμογή 17

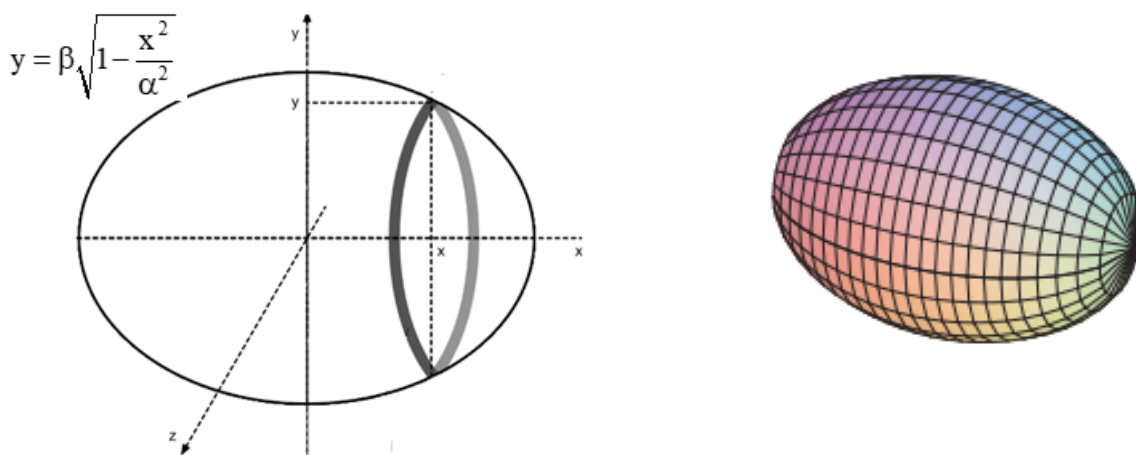
Έστω ότι έχουμε το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται εάν περιστρέψουμε το χωρίο αυτό γύρω από τον:

(α) x-άξονα

(β) τον y-άξονα (τα στερεά σε αυτή την περίπτωση ονομάζονται **ελλειψοειδή**)

Λύση

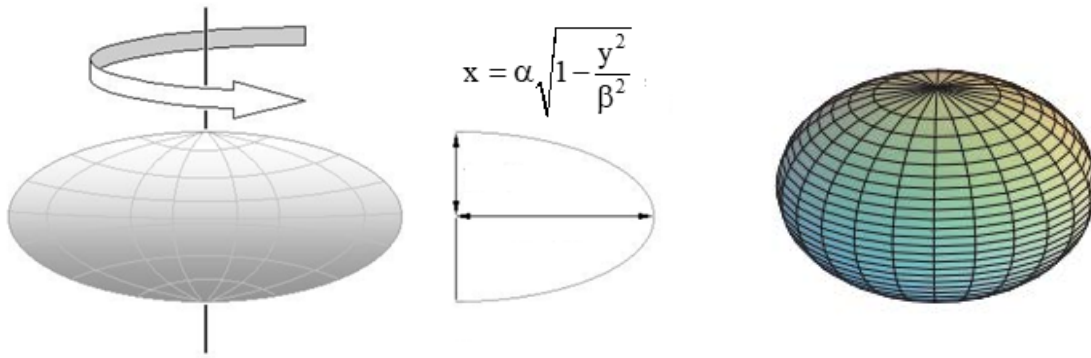
(α) Το ζητούμενο στερεό προκύπτει εάν περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται από την συνάρτηση $y = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$, $-\alpha \leq x \leq \alpha$ και x-άξονα γύρω από τον x-άξονα.



Επομένως, ο ζητούμενος όγκος δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} \pi \left(\beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \right)^2 dx = \pi \beta^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right) dx = \pi \beta^2 \left(x - \frac{x^3}{3\alpha^2} \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\pi \beta^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3\alpha^2} \right) = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta^2$$

(β) Ανάλογα, το ζητούμενο στερεό προκύπτει εάν περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται από την συνάρτηση $x = \alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}$, $-\beta \leq y \leq \beta$ και y-άξονα γύρω από τον y-άξονα.



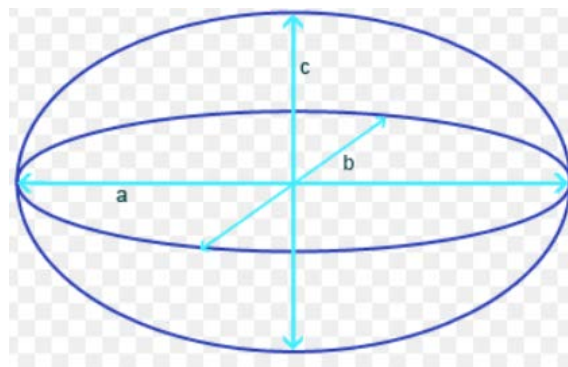
$$V = \int_{-\beta}^{\beta} \pi \left(\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} \right)^2 dy = \pi \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} \right) dy = \pi \alpha^2 \left(y - \frac{y^3}{3\beta^2} \right) \Big|_{-\beta}^{\beta} = 2\pi \alpha^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{3\beta^2} \right) = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \beta$$

■

Παρατήρηση 4

(α) Είναι γνωστό ότι ο όγκος ενός ελλειψοειδούς με μήκος (θετικών) αξόνων α, β, c είναι ίσος με:

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta c$$



Στην (α) περίπτωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\beta = c$, οπότε ο όγκος με χρήση του τύπου είναι ίσος

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta \beta = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta^2$$

Ανάλογα, στην (β) περίπτωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι $a = c$, οπότε ο όγκος με χρήση του τύπου είναι ίσος

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \alpha \beta = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \beta.$$

(β) Ο όγκος στην περίπτωση (β) θα μπορούσε να υπολογιστεί με τη βοήθεια του τύπου

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2\pi x f(x) dx \quad \text{με} \quad f(x) = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}, \quad \text{η ολοκλήρωση όμως είναι αρκετά δύσκολη}$$

(απαιτεί χρήση αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων).