

17. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Όταν ορίζει κανείς το **ορισμένο ολοκλήρωμα** μιάς συνάρτησης f σ' ένα διάστημα της μορφής $[a, \beta]$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ (δηλαδή το $\int_a^\beta f(x) dx$), θεωρεί ότι:

- (I) η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, \beta]$ και
- (II) το διάστημα $[a, \beta]$ έχει πεπερασμένα άκρα.

Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται κάποια από τις δύο αυτές συνθήκες λέμε ότι έχουμε ένα **γενικευμένο ολοκλήρωμα**.

(Α) Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $[a, +\infty)$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[a, c]$, $c \geq a$ (ή ανάλογα ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a]$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[c, a]$, $c \leq a$).

Ορισμός 1

Καθένα από τα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους** (στο διάστημα $[a, +\infty)$ ή στο διάστημα $(-\infty, a]$ αντίστοιχα). Η **τιμή** των ολοκληρωμάτων υπολογίζεται ως εξής: εάν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

και είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **συγκλίνει**. Στην περίπτωση που το όριο $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx = \pm \infty$ ή δεν υπάρχει, λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **αποκλίνει**.

Ανάλογα υπολογίζεται το $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ στην περίπτωση που υπάρχει το $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x) dx$:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x) dx$$

Εφαρμογή 1

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_{-\infty}^1 e^x dx \quad (β) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Λύση

$$(α) \int_{-\infty}^1 e^x dx \quad \alpha' \text{ είδους (λόγω της ύπαρξης του } -\infty)$$

$$\int_{-\infty}^1 e^x dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^1 e^x dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^x \Big|_{\beta}^1 = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (e^1 - e^{\beta}) = e^1 - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{\beta} = e^1 \text{ συγκλίνει.}$$

$$(\text{το } \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{\beta} = 0)$$

$$(β) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha' \text{ είδους (λόγω της ύπαρξης του } +\infty)$$

Θέτουμε $u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx$ και λύνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{u} + c \stackrel{u=x^2+1}{=} -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(x^2+1)} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(\beta^2+1)} + \frac{1}{2(\alpha^2+1)} \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2(\alpha^2+1)} \text{ συγκλίνει.} \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

(α) **Πρόταση:** Το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει το

$\int_c^{+\infty} f(x) dx$, για κάποιο $\alpha < c$, $c \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Αποδεικνύεται ότι, η τιμή του $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του $c \in \mathbb{R}$.

(β) Εάν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx$, για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

ορίζεται να είναι ίσο με:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Αποδεικνύεται ότι, η τιμή του $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

για οποιοδήποτε άλλο $c \in \mathbb{R}$.

(γ) (γεωμετρική ερμηνεία). Έστω ότι υπάρχει το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και έστω ότι $f(x) \geq 0$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τον άξονα xox' και την ευθεία $x=a$.

Θεώρημα 1.

Ισχύουν τα ακόλουθα (για τα **p-ολοκληρώματα**)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει} & \text{για } p > 1 \\ \text{αποκλίνει} & \text{για } p \leq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c$$

$$(I) \text{ Εάν } p > 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p > 1$, το x^{p-1} παραμένει στον παρονομαστή) και

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \frac{1}{\beta^{p-1}} \right) - \frac{1}{1-p} \frac{1}{1^{p-1}} = -\frac{1}{1-p} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(II) \text{ Εάν } p < 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{1-p} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p < 1$, το x^{1-p} παραμένει στον αριθμητή) και

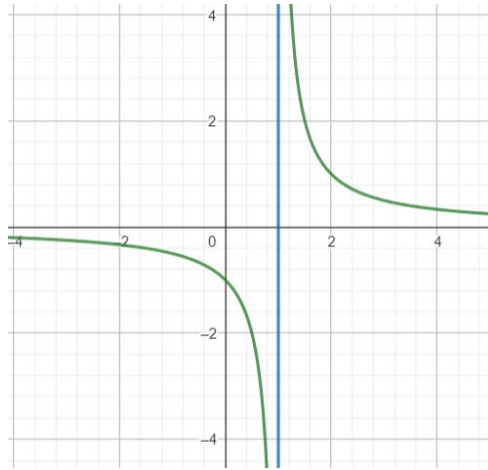
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \beta^{1-p} \right) - \frac{1}{1-p} 1^{1-p} = +\infty \text{ αποκλίνει.}$$

$$(III) \text{ Τέλος, εάν } p=1 \text{ τότε } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty \text{ αποκλίνει.}$$

■

(B) Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους

Το σημείο x_0 ονομάζεται **ιδιόμορφο ή ανώμαλο** σημείο της συνάρτησης f , όταν η f είναι ορισμένη σε μια γειτονιά $[a, x_0)$ ή $(x_0, b]$ ή $[a, x_0) \cup (x_0, b]$ του x_0 και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αντίστοιχα απειρίζεται θετικά ή αρνητικά (το γράφημα παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτο στο σημείο x_0). Π.χ. το σημείο $x_0=1$ είναι ιδιόμορφο σημείο της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x-1}$



Ορισμός 2

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(a, b]$, ολοκληρώσιμη στα υποδιαστήματα της μορφής $[c, b]$, $c > a$ και το a είναι ιδιόμορφο σημείο. Το ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_{a^+}^b f(x) dx \quad (\text{ή συμβ. } \int_a^b f(x) dx)$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους**. Η τιμή του ολοκληρώματος υπολογίζεται ως εξής: εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

και είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε:

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\int_{a^+}^b f(x) dx$ **συγκλίνει**. Στην περίπτωση που το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \pm \infty \quad \text{ή δεν υπάρχει, λέμε ότι το } \int_{a^+}^b f(x) dx \text{ **αποκλίνει**}.}$$

Ανάλογα ορίζεται και υπολογίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^{\beta^-} f(x) dx$ (με β ιδιόμορφο σημείο) στην περίπτωση που υπάρχει $\lim_{\varepsilon \rightarrow \beta^-} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x) dx$, δηλαδή

$$\int_a^{\beta^-} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \beta^-} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x) dx$$

Εφαρμογή 2

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad (β) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Λύση

$$(α) \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad \text{β' είδους} \quad (\text{η } f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ δεν ορίζεται στο σημείο } x_0=1)$$

$$\int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \int_{\beta}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad (1)$$

Θέτουμε $u=1-x \Rightarrow du = -dx$ και λύνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + c \stackrel{u=1-x}{=} -\ln|1-x| + c \quad (2)$$

Άρα

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1-x| \Big|_{\beta}^2 \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1-2| + \ln|1-\beta| \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1| \right) + \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\ln|1-\beta| \right) = 0 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

Το $\int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx$ αποκλίνει.

$$(β) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (1) \quad \text{β' είδους} \quad (\text{η } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ δεν ορίζεται στο σημείο } x_0=0)$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \quad (*)$$

Άρα

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_{\beta}^3 \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{\beta} \right) = 2\sqrt{3}$$

Το $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει.

■

Παρατήρηση

Είναι δυνατόν η ιδιομορφία να εμφανίζεται σαν το εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε το ολοκλήρωμα σε δύο

ολοκληρώματα β' είδους, ένα με την ιδιομορφία στο κάτω άκρο ολοκλήρωσης και ένα στο άνω άκρο ολοκλήρωσης. Πράγματι, αν το γ είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης και $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(με την προϋπόθεση ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα συγκλίνουν).

Θεώρημα 2.

Ισχύουν τα ακόλουθα (για τα **p-ολοκληρώματα**)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει} & \text{για } p \leq 1 \\ \text{αποκλίνει} & \text{για } p > 1 \end{cases}$$

Προσοχή στα όρια της ολοκλήρωσης και στην **δύναμη του p** για τη σύγκλιση.

Απόδειξη

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c$$

$$(I) \text{ Εάν } p > 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p > 1$, το x^{p-1} παραμένει στον παρονομαστή) και

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \frac{1}{1^{p-1}} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} \frac{1}{\beta^{p-1}} \right) = -\infty \text{ αποκλίνει.}$$

$$(II) \text{ Εάν } p < 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{1-p} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p < 1$, το x^{1-p} παραμένει στον αριθμητή) και

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} 1^{1-p} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} \beta^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(III) \text{ Τέλος, εάν } p=1 \text{ τότε } \int_0^1 \frac{1}{x} dx = x \Big|_0^1 = 1 \text{ συγκλίνει.}$$

■

(Γ) Γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' είδους.

Ορισμός 3

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα που είναι συγχρόνως α' και β' είδους ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' είδους**, δηλαδή είναι ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ όπου το α είναι ιδιόμορφο σημείο. Ο τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος αυτού είναι ο εξής: εάν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ για κάποιο $c > a$, τότε:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

(το $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ είναι α είδους και $\int_a^c f(x) dx$ β είδους). Και σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει. Μπορεί ναδειχθεί ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του $c > a$.

Εφαρμογή 3

Να εξεταστεί η σύγκλιση του ολοκληρώματος $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Λύση

Το $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ γ' είδους, γιατί:

το ολοκλήρωμα $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ έχει ένα από τα όριά του $+\infty$ αλλά και η $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ δεν ορίζεται στο σημείο $x_0 = 0$ άρα το «σπάμε» σε δύο άλλα ολοκληρώματα π.χ. $\int_{0^+}^{\infty} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$ όπου $\int_1^{\infty}$ = γενικευμένο α' είδους, $\int_{0^+}^1$ = γενικευμένο β' είδους άρα το $\int_{0^+}^{\infty} =$ γενικευμένο γ' είδους,

Τώρα, το:

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα :

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{1/3}} dx = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + c = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} x^{2/3} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c \quad (2)$$

Άρα

$$(1) \Rightarrow \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) = \frac{3}{2} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Και (ανάλογα):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} \right) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) - \frac{3}{2} = +\infty$$

Δηλαδή το $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ απειρίζεται (αποκλίνει)

Τελικά, αφού $\int_{0^+}^{\infty} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$ και το $\int_1^{\infty}$ απειρίζεται θα έχουμε και το ολοκλήρωμα

$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ να απειρίζεται (αποκλίνει).

■

Κριτήρια σύγκλισης

Θεώρημα 3.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $0 \leq f(x) \leq g(x)$, τότε εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **συγκλίνει**, έπεται ότι **συγκλίνει** και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Θεώρημα 4.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $0 \leq g(x) \leq f(x)$, τότε εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **αποκλίνει**, έπεται ότι **αποκλίνει** και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Θεώρημα 5 (απόλυτη σύγκλιση)

Αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Εφαρμογή 4

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων. Τι είδους είναι τα καθένα από αυτά;

$$(α) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \quad (β) \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx \quad (γ) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (δ) \int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx \quad (ε) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Λύση

(α) Το $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$). Αν

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \& \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$\text{Άρα } \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad \text{οπότε}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_1^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln \beta)^2}{2} \right) - \frac{(\ln 1)^2}{2} = +\infty \quad \text{άρα αποκλίνει.}$$

(β) Το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

$$\text{Έχουμε } x^5+1 > x^5 \Rightarrow \frac{1}{x^5+1} < \frac{1}{x^5} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^5+1} < \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4} = g(x) \quad \text{Αλλά το } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$$

συγκλίνει (σύμφωνα με θεώρημα 1, με $p = 4$), άρα και το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx$ συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 3).

(γ) Το $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

$$\text{Έχουμε } x^3+1 > x^3 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} > \frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Αλλά το:}$$

$$\int_2^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right|_2^{+\infty} = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right|_2^{+\infty} = \left. \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right|_2^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\beta^3} \right) - \frac{2}{3} \sqrt{2^3} = +\infty$$

αποκλίνει, άρα και το $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ αποκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 4).

(δ) Το $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

Έχουμε $e^x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} = g(x)$. Αλλά το

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln(\beta+1) - \ln(0+1) = +\infty$$

αποκλίνει, άρα και το $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ αποκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 4 παραπάνω).

(ε) Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

Έχουμε ότι: $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$. Αλλά το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 1 παραπάνω, $p=2$), άρα και το $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ συγκλίνει, δηλαδή το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 5 παραπάνω).

■

Θεώρημα 6 (οριακό κριτήριο σύγκρισης)

Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, +\infty)$ και έστω:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(α) εάν $0 < L < +\infty$, τότε τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ έχουν την **ίδια συμπεριφορά** (δηλαδή συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα)

(β) εάν $L = 0$ τότε, εάν το $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ **συγκλίνει** τότε **συγκλίνει** και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$.

(γ) εάν $L = +\infty$ τότε, εάν το $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ **αποκλίνει** τότε **αποκλίνει** και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$.

Εφαρμογή 5

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx \quad (β) \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3} dx$$

Λύση

(α) Εάν θεωρήσουμε σαν $f(x) = \frac{1}{x^3 e^x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^3 e^x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 = L$$

Αλλά από το θεώρημα 1, το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ($p=3$) συγκλίνει, οπότε από το θεώρημα 6 (β)

θα συγκλίνει και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx$.

(β) Εάν θεωρήσουμε σαν $f(x) = \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ (γιατί $\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3} \approx \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 3} = 1 = L$$

Αλλά από το θεώρημα 1, το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ($p=3$) συγκλίνει, οπότε από το θεώρημα 6 (α)

θα συγκλίνει και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx$.

■

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι στενά συνδεδεμένα με τις σειρές, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7 (γενικευμένο ολοκλήρωμα και σειρές)

Έστω f μία ολοκληρώσιμη και φθίνουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$ και $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει τότε και μόνον τότε όταν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Εφαρμογή 6

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

$$(α) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1} \quad (β) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{3x+1}$. Η f είναι φθίνουσα γιατί:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3x+1} \right)' = \frac{-3}{(3x+1)^2} < 0$$

και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{3x+1} dx$. Αλλά:

$$\int \frac{1}{3x+1} dx \stackrel{u=3x+1}{\underset{du=3dx}{=}} \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} dx = \frac{1}{3} \ln|u| + c = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + c$$

οπότε: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln(3\beta+1) - \frac{1}{3} \ln(3 \cdot 1) = +\infty$ αποκλίνει.

Επομένως, από το θεώρημα 7, αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$.

(β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Η f είναι φθίνουσα γιατί:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3} \right)' = \frac{-3x^2}{x^6} < 0$$

Ακόμα, το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} x^{-3} dx = -\frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1^2} = \frac{1}{2}$$

συγκλίνει. Επομένως, από το θεώρημα 7, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

■