

16. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (κλασμάτων), δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα ως προς x . Ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ και τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

(Α) $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$

Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή, $Q(x)$, οπότε περιέχει παράγοντες της μορφής: $(x+\alpha)^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (γιατί;)

(α) Εάν $P(x) = \lambda$ (σταθερά), έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{\lambda}{(x+\alpha)^k} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u = x + \alpha$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{\lambda}{(x+\alpha)^k} dx \stackrel{u=x+\alpha}{\underset{du=dx}} = \lambda \int \frac{1}{u^k} du = \lambda \int u^{-k} du = \frac{\lambda}{-k+1} u^{-k+1} + c = \frac{\lambda}{-k+1} (x+\alpha)^{-k+1} + c$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{(x+2)^3} dx$$

Λύση

Θέτουμε $u = x + 2 \Rightarrow du = dx$ και

$$\int \frac{1}{(x+2)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = \int u^{-3} du = \frac{1}{-3+1} u^{-3+1} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + c$$

■

(β) Εάν $P(x) = \delta \epsilon \nu$ είναι σταθερά, έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{(x+\alpha)^k} dx$$

Αναλύουμε την προς ολοκλήρωση ποσότητα **σε απλά κλάσματα**, ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x+\alpha)^k} = \frac{A_1}{(x+\alpha)^1} + \frac{A_2}{(x+\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x+\alpha)^k}$$

(δηλαδή σε τόσα κλάσματα, όση είναι και η δύναμη του παράγοντα του παρονομαστή). Κατόπιν για καθένα από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν, χρησιμοποιούμε το (α).

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow A(x+1)+B=x \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & B=-1 \\ x=0 & A=1 \end{cases}$$

οπότε:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

■

(γ) Έστω ότι ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $Q(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ δεν παραγοντοποιείται (έχει δηλαδή μιγαδικές ρίζες, $\Delta < 0$). Τότε:

(I) Εάν το $P(x)=\lambda$ (σταθερά), τότε έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{\lambda}{ax^2+\beta x+\gamma} dx$$

Στην περίπτωση αυτή, συμπληρώνουμε το τετράγωνο του παρονομαστή και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx$$

Λύση

Το τριώνυμο x^2+2x+6 δεν έχει πραγματικές ρίζες, γιατί $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 6=-20<0$, οπότε **δεν** μπορεί να πααραγοντοποιηθεί. Στην περίπτωση αυτή συμπληρώνουμε το τετράγωνο, ως εξής:

$$x^2+2x+6 = x^2+2\cdot 1\cdot x+1+5 = (x+1)^2+5$$

Οπότε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2x+6} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+5} dx \stackrel{u=x+1}{du=dx} = \int \frac{1}{u^2+5} du = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2+1} du \\ &\stackrel{t=\frac{u}{\sqrt{5}} \Rightarrow u=\sqrt{5}t}{du=\sqrt{5}dt} = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} t + c = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} \left(\frac{u}{\sqrt{5}} \right) + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{τοξεφ} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right) + c \end{aligned}$$

■

(II) Εάν το $P(x)$ = **δεν** είναι σταθερά, τότε έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+\beta x+\gamma} dx$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ και ακόμα ότι:

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{τοξεφ} x + c$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx$$

Λύση

Όπως και προηγούμενα, το τριώνυμο x^2+2x+6 δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε **δεν** μπορεί να πααραγοντοποιηθεί. Ακόμα, η: $(x^2+2x+6)' = 2x+2$ και ο αριθμητής του ολοκληρώματος μπορεί να γραφεί σαν:

$$x+6 = \frac{1}{2}(2x+2)+5$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+5}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx + \int \frac{5}{x^2+2x+6} dx$$

Αλλά το:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{(x^2+2x+6)'}{x^2+2x+6} dx = \ln|x^2+2x+6| + c$$

Ακόμα:

$$\int \frac{5}{x^2+2x+6} dx = \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

(όπως είδαμε παραπάνω)

Τελικά:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx + \int \frac{5}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+6| + \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

■

(δ) Έστω ότι ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται (έχει δηλαδή δύο πραγματικές, άνισες, ρίζες) ως εξής:

$$Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x-p_1)(x-p_2)$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε ανάλυση σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{P(x)}{ax^2 + \beta x + \gamma} = \frac{P(x)}{a(x-p_1)(x-p_2)} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{A}{(x-p_1)} + \frac{B}{(x-p_2)} \right\}$$

καθένα δε από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν είναι της μορφής (α)

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί το $\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx$.

Λύση

Αναλύοντας την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε **απλά κλάσματα** έχουμε:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow A(x-4)+B(x+1)=5x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu & x=4 & 5B=10 & \Rightarrow B=2 \\ \alpha \nu & x=-1 & -5A=-15 & \Rightarrow A=3 \end{cases}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{5x-10}{x^2-3x-4} &= \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-4} \Rightarrow \int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-4} dx = \\ &= 3\ln|x+1| + 2\ln|x-4| + c = \ln|(x+1)^3(x-4)^2| + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Αν οι ρίζες (του τριωνύμου του παρονομαστή) είναι πραγματικές και ίσες τότε το ολοκλήρωμα είναι της μορφής (α). ($Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x-p)(x-p) = a(x-p)^2$).

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται όπως στις περιπτώσεις Α (α), (β)).

(ε) Στην **γενική περίπτωση**, ο παρονομαστής θα αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων (γιατί;). Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα, για τη δε ανάλυση χρησιμοποιούμε κλάσματα (παράγοντες), ανάλογα με τη μορφή των παραγόντων του παρονομαστή (όπως είδαμε παραπάνω).

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το $\int \frac{2x+4}{x^3+4x^2} dx$

Λύση

Αναλύοντας την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $\frac{2x+4}{x^3+4x^2}$ σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{2x+4}{x^3+4x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x+4} \Rightarrow Ax(x+4)+B(x+4)+\Gamma x^2=2x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu & x=0 & 4B=4 & \Rightarrow B=1 \\ \alpha \nu & x=-4 & 16\Gamma=-4 & \Rightarrow \Gamma=-\frac{1}{4} \\ \alpha \nu & x=1 & 5A+5B+\Gamma=6 & \Rightarrow A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Δηλαδή:

$$\int \frac{2x+4}{x^3+4x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \ln|x+4| + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + c$$

■

Παρατήρηση Στους λογαρίθμους, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$1. \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$3. \ln a^b = b \cdot \ln a$$

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2+x} dx$$

Λύση

Παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή έχουμε: $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$ και το τριώνυμο x^2+x+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες (δεν παραγοντοποιείται).

Χρησιμοποιώντας ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχουμε:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2+x} = \frac{x+2}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} \Rightarrow A(x^2+x+1) + x(Bx+\Gamma) = x+2 \Rightarrow$$

$$(A+B)x^2 + (A+\Gamma)x + A = x+2 \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A+B=0 \\ A+\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ \Gamma=-1 \end{cases}$$

Οπότε, το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3+x^2+x} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x-1}{x^2+x+1} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \\ &= 2 \ln|x| - \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = 2 \ln|x| - \ln|x^2+x+1| + c \\ &= \ln x^2 - \ln|x^2+x+1| + c = \ln \left(\frac{x^2}{x^2+x+1} \right) + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Εάν ένας από τους παράγοντες του παρονομαστή (μετά την παραγοντοποίηση) είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μιγαδικές ρίζες, δηλαδή **δεν παραγοντοποιείται**, τότε το κλάσμα που αντιστοιχεί σε αυτόν τον παράγοντα, στην ανάλυση των απλών κλασμάτων, θα έχει τη μορφή:

$$\frac{Ax+B}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

(δηλαδή ο αριθμητής είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού, ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι μια σταθερά).

(B) $\deg (P(x)) \geq \deg (Q(x))$

Διαιρούμε το $P(x)$ με το $Q(x)$ και έστω $\Pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης και $U(x)$ το υπόλοιπό της. Στην περίπτωση αυτή είναι γνωστό ότι ισχύει η εξής ισότητα (ταυτότητα της διαίρεσης):

$$P(x) = Q(x) \cdot \Pi(x) + U(x), \quad \text{με} \quad \deg (U(x)) < \deg (Q(x))$$

Αλλά τότε (διαιρώντας με το $Q(x)$), έχουμε:

$$P(x) = Q(x) \cdot \Pi(x) + U(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{U(x)}{Q(x)}$$

και το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \Pi(x) dx + \int \frac{U(x)}{Q(x)} dx$$

όπου το $\int \frac{U(x)}{Q(x)} dx$ υπολογίζεται όπως στην περίπτωση (A) ($\deg (U(x)) < \deg (Q(x))$)

Εφαρμογή 8

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x} dx$$

Λύση

Διαιρώντας το πολυώνυμο $x^3 + 2x^2 + x + 1$ με το πολυώνυμο $x^2 + x$, έχουμε:

$$\begin{array}{r}
 x^3+2x^2+x+1 \quad | \quad \underline{x^2+x} \\
 -x^3-x^2 \\
 \hline
 x^2+x+1 \\
 -x^2-x \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Δηλαδή: $x^3+2x^2+x+1=(x^2+x) \cdot (x+1)+1$ (ταυτότητα της διαίρεσης), από όπου:

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}=(x+1)+\frac{1}{x^2+x}$$

και το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}dx=\int (x+1)dx+\int \frac{1}{x^2+x}dx$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow A(x+1)+Bx=1\Rightarrow \begin{cases} \alpha\nu \ x=0 & A=1 \\ \alpha\nu \ x=-1 & -B=1 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

Οπότε:

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x|-\ln|x+1|+c=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

Τελικά:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}dx=\int (x+1)dx+\int \frac{1}{x^2+x}dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

■

2^ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα I και a σημείο του, τότε:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Γενικότερα:

Θεώρημα 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα I και a σημείο του, τότε

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Εφαρμογή

$$(I) \quad \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}$$

$$(II) \quad \frac{d}{dx} \left(\int_3^{\eta\mu x} \frac{1}{1+t^2} dt \right) = \frac{1}{1+\eta\mu^2 x} \cdot (\eta\mu x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x}$$

■

Παρατήρηση Αν προσπαθήσει κάποιος να υπολογίσει το ολοκλήρωμα πρώτα και μετά (να υπολογίσει) την παράγωγο, είναι (λίγο) πιο δύσκολα.

Π.χ. για την $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right)$ έχουμε ότι $\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{x^3} = \ln x^3 - \ln 1 = \ln x^3$ και

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{d}{dx} (\ln x^3) = \frac{1}{x^3} (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

Ολοκλήρωση δυνάμεων ημιτόνου και συνημιτόνου

(Α) Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int \eta\mu^m x \cdot \sigma\upsilon\nu^n x \, dx, \quad m, n=0,1,2,\dots$$

χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα:

		n	
		Περιττός	Άρτιος
m	Περιττός	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\sigma\upsilon\nu x$ 2) Θέτουμε $u=\eta\mu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\eta\mu x$ 2) Θέτουμε $u= \sigma\upsilon\nu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
	Άρτιος	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\sigma\upsilon\nu x$ 2) Θέτουμε $u= \eta\mu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$	Χρησιμοποιούμε τις (α) $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ (β) $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και καταλήγουμε σε μια από τις άλλες περιπτώσεις

Παρατήρηση

Αν **m** = περιττός και **n** = περιττός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση **u= σινx**.

Παραδείγματα

(1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

Λύση

Εδώ m=4 άρτιος και n=3 περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u=\eta\mu x \Rightarrow du=\sigma\upsilon\nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx &= \int \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int \eta\mu^4 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\
&= \int u^4 (1 - u^2) du = \int (u^4 - u^6) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \\
&= \frac{\eta\mu^5 x}{5} - \frac{\eta\mu^7 x}{7} + c
\end{aligned}$$

(2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=5$ περιττός και $n=4$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx &= -\int \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot (\eta\mu x) \, dx = -\int (\eta\mu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot (\eta\mu x) \, dx \\
&= -\int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot (\eta\mu x) \, dx = -\int (1 - u^2)^2 \cdot u^4 \, du \\
&= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \cdot u^4 \, du = -\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right) + c \\
&= -\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5} - \frac{2\sigma\upsilon\nu^7 x}{7} + \frac{\sigma\upsilon\nu^9 x}{9}\right) + c
\end{aligned}$$

(3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=0$ άρτιος και $n=5$ περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx &= \int \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\
&= \int (1 - \eta\mu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (1 - u^2)^2 \, du \\
&= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = \left(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c \\
&= \left(\eta\mu x - \frac{2\eta\mu^3 x}{3} + \frac{\eta\mu^5 x}{5}\right) + c
\end{aligned}$$

(4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

Λύση

1ος τρόπος

Εδώ $m=1$ περιττός και $n=3$ περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx &= \int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int \eta\mu x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \, \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\ &= \int u \cdot (1 - u^2) \, du = \int (u - u^3) \, du = \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + C = \\ &= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{\eta\mu^4 x}{4} + C\end{aligned}$$

2ος τρόπος

Εδώ $m=1$ περιττός και $n=3$ περιττός, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (λόγω της παρατήρησης) την αντικατάσταση $u=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du=-\eta\mu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx &= -\int -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx = -\int u^3 \, du = -\frac{u^4}{4} + C = \\ &= -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C\end{aligned}$$

Παρατήρηση

Τα αποτελέσματα του 1^{ου} και 2^{ου} τρόπου ενώ φαίνονται να είναι διαφορετικά, στην πραγματικότητα δεν είναι. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{\eta\mu^4 x}{4} + C &= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{(\eta\mu^2 x)^2}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C \\ &= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C = -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + \frac{1}{4} + C = -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C, \quad C = \frac{1}{4} + C\end{aligned}$$

(5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=2$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες: $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και

$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ οπότε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx\end{aligned}$$

Αλλά στο ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx$, $m=0$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την

ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu^2 2x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4x}{2}$ οπότε:

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 4x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \eta\mu 4x + c$$

Τελικά:

$$\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \eta\mu 4x + c = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c$$

(6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=0$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$,

οπότε:

$$\begin{aligned} \int \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx &= \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \\ &\stackrel{\substack{u=2x \\ du=2dx \\ \frac{1}{2}du=dx}}{=} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu u \, du = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu u + c \stackrel{u=2x}{=} \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c \end{aligned}$$

(7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=4$ άρτιος και $n=0$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$,

οπότε:

$$\begin{aligned} \int \eta\mu^4 x \, dx &= \int (\eta\mu^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1-\sigma\upsilon\nu 2x)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1-2\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} 2 \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} 2 \cdot \frac{1}{2} \eta\mu 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2} \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Στην περίπτωση ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων (κλασμάτων), που περιέχουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ δεν ισχύουν απαραίτητα οι παραπάνω αντικαταστάσεις.

(8) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (α) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x} dx$ (β) $\int \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x} dx &= \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= \int \frac{(1-\eta\mu x) \cdot (1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int (1+\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= \int \sigma\upsilon\nu x dx + \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx \quad \begin{matrix} u=\eta\mu x \\ du=\sigma\upsilon\nu x dx \end{matrix} = \\ &= \eta\mu x + \int u du = \eta\mu x + \frac{u^2}{2} + c = \eta\mu x + \frac{u^2}{2} + c \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \eta\mu x + \frac{\eta\mu^2 x}{2} + c\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx &= \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx + \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\phi x + \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \begin{matrix} u=\sigma\upsilon\nu x \\ du=-\eta\mu x dx \end{matrix} = \\ &= \varepsilon\phi x - \int \frac{1}{u^2} du = \varepsilon\phi x - \int u^{-2} du = \varepsilon\phi x - \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} + c = \\ &= \varepsilon\phi x + \frac{1}{u} + c = \varepsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + c\end{aligned}$$

■

(B) Τα ολοκληρώματα των μορφών:

(α) $\int \eta\mu(mx) \cdot \eta\mu(nx) dx$

(β) $\int \eta\mu(mx) \cdot \sigma\upsilon\nu(nx) dx$

(γ) $\int \sigma\upsilon\nu(mx) \cdot \sigma\upsilon\nu(nx) dx$ όπου $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους:

(i) $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2}$

(ii) $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)}{2}$

(iii) $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2}$

Ακόμα είναι γνωστό ότι: $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x \, dx$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x \, dx &= \int \left(\frac{\eta\mu(3x-7x) + \eta\mu(3x+7x)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (\eta\mu(-4x) + \eta\mu(10x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \eta\mu(-4x) \, dx + \frac{1}{2} \int \eta\mu(10x) \, dx = -\frac{1}{2} \int \eta\mu(4x) \, dx + \frac{1}{2} \int \eta\mu(10x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \sigma\upsilon\nu 4x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right) \sigma\upsilon\nu 10x + c \\ &= \frac{1}{8} \sigma\upsilon\nu 4x - \frac{1}{20} \sigma\upsilon\nu 10x + c\end{aligned}$$

•