

15. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός 1

Εάν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (όπου I ένα διάστημα), και έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

τότε, η συνάρτηση F καλείται **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγωγος** της f στο I .

Παρατήρηση

Εάν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f στο I , τότε υπάρχουν άπειρες και είναι οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2

Εάν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω ότι υπάρχει μια αρχική συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ της f στο I . Τότε, το **αόριστο ολοκλήρωμα** της **f στο I** (συμβολίζεται με $\int f(x)dx$) είναι το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων $F+c$, $c \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι ισχύει: $\int f'(x)dx = f(x)+c$

Πρόταση 1 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Εάν $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(\alpha) \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(\beta) \int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Παρατήρηση

Δεν ισχύει (εν γένει): $\int (f(x) \cdot g(x))dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

Ακόμα, **δεν ισχύει** (εν γένει): $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Πρόταση 2 (αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων)

Ισχύουν τα παρακάτω:

$$(1) \int dx = x + c$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$(3) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$(4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$

$$(5) \int \eta \mu x dx = -\sigma \nu x + c$$

$$(6) \int \sigma \nu x dx = \eta \mu x + c$$

$$(7) \int \frac{1}{\sigma \nu^2 x} dx = \epsilon \phi x + c \quad ((\epsilon \phi x)' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x})$$

$$(8) \int e^x dx = e^x + c$$

$$(9) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, \quad 0 < a \neq 1 \quad ((a^x)' = a^x \ln a)$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int (e^{x+2} + \sqrt{x}) dx \quad (\beta) \int \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx \quad (\gamma) \int x \sqrt{x} dx$$

$$(\delta) \int \frac{x + \sqrt{x}}{x} dx \quad (\epsilon) \int (x - \sqrt{x})^2 dx \quad (\sigma \tau) \int \frac{\sigma \nu^2 x}{1 - \eta \mu x} dx$$

$$(\zeta) \int \frac{\sigma \nu 2x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} dx$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} \int (e^{x+2} + \sqrt{x}) dx &= \int e^x e^2 dx + \int \sqrt{x} dx = e^2 \int e^x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = e^2 \int e^x dx + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= e^2 e^x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = e^{x+2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$(\beta) \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = \varepsilon\varphi x - x + c$$

$$(\gamma) \int x\sqrt{x} dx = \int x x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$$

(δ)

$$\begin{aligned} \int \frac{x+\sqrt{x}}{x} dx &= \int \frac{x}{x} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = x + \int x^{\frac{1}{2}-1} dx = x + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= x + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c = x + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$(\varepsilon) \int (x-\sqrt{x})^2 dx = \int x^2 dx + 2 \int x\sqrt{x} dx + \int (\sqrt{x})^2 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$$

(στ)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1-\eta\mu x} dx &= \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x} dx = \int \frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x} dx = \int (1+\eta\mu x) dx = \\ &= \int dx + \int \eta\mu x dx = x - \sigma\upsilon\nu x + c \end{aligned}$$

(ζ) Είναι γνωστό ότι: $\sin 2x = \sin^2 x - \eta\mu^2 x$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx &= \int \frac{\sin^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \\ &= \int (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx = \int \sigma\upsilon\nu x dx - \int \eta\mu x dx = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c \end{aligned}$$

■

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω ότι υπάρχει μια παράγουσα συνάρτηση $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ της f στο I , δηλαδή $\int f(x) dx = F(x) + c$. Η ποσότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$** ή **ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f από**

το σημείο α μέχρι το σημείο β. Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται/αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Παρατήρηση

Το ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, \beta]$ ορίζεται γενικότερα/αυστηρότερα με τη βοήθεια διαμερίσεων του διαστήματος $[a, \beta]$.

Πρόταση 3 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Εάν $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

$$(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} c f(x) dx = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (\text{από το } (\alpha), (\beta): \text{ γραμμικότητα ορισμένου ολοκληρώματος})$$

$$(\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \quad \alpha < \gamma < \beta$$

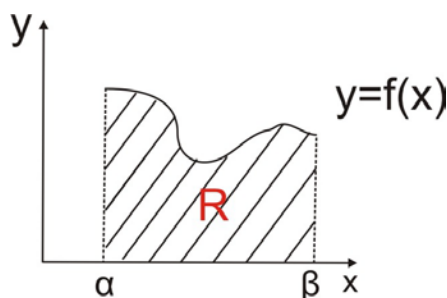
$$(\delta) \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$(\epsilon) \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

Παρατήρηση (ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος)

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και R το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$. Εάν $f(x) \geq 0$, τότε το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , είναι ίσο με:

$$E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$



Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

$$(α) \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx \quad (β) \int_0^4 (x-\sqrt{x})^2 \, dx \quad (γ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx$$

Λύση

(α) Είδαμε ότι: $\int x\sqrt{x} \, dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$ οπότε:

$$\int_0^1 x\sqrt{x} \, dx = \left. \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \right|_0^1 = \frac{2}{5} 1^2 \sqrt{1} - \frac{2}{5} 0^2 \sqrt{0} = \frac{2}{5}$$

(β) Είδαμε ότι: $\int (x-\sqrt{x})^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$ οπότε:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (x-\sqrt{x})^2 \, dx &= \left. \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = \frac{4^3}{3} + \frac{4}{5} 4^2 \sqrt{4} + \frac{4^2}{2} - \frac{0^3}{3} - \frac{4}{5} 0^2 \sqrt{0} - \frac{0^2}{2} = \\ &= \frac{64}{3} + \frac{64}{5} \sqrt{4} + 8 = .. \end{aligned}$$

(γ) Είδαμε ότι: $\int \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$ οπότε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx = \left. \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$$

■

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Πρόταση 1

Εάν $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες, με συνεχείς πρώτες παραγώγους, τότε ισχύει:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Πράγματι, είναι γνωστός ο κανόνας παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Απ' όπου, ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε τον κανόνα:

$$\begin{aligned} \int (f(x)g(x))' dx &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \\ \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int x^2 e^x dx$$

$$(\beta) \int \ln x dx$$

$$(\gamma) \int x \eta\mu 2x dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} (\alpha) \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int x' e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

$$(\beta) \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

(γ)

$$\begin{aligned} \int x \cdot \eta\mu 2x dx &= \int x \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)' dx = -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \frac{1}{2} \int x' (-\sigma\upsilon\nu 2x) dx = -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x dx = \\ &= -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 2x}{4} + c \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int x \ln x dx$$

$$(\beta) \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 (\ln x)' \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx &= \int \left(-\frac{1}{x} \right)' \ln x \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x} (\ln x)' \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int x^{-2} \, dx = -\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες κάνουμε, συνήθως, όταν βρισκόμαστε στις ακόλουθες καταστάσεις: (ή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι)

(α) γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική ή λογαριθμική

(β) γινόμενο πολυωνυμικής με τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο)

(γ) γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο)

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x \sin x \, dx$

Λύση

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x + \int e^x \eta \mu x \, dx = \\ &= e^x \sin x + \int (e^x)' \eta \mu x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x (\eta \mu x)' \, dx = \\ &= e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \eta \mu x}{2} + c$$

■

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta \mu (\ln x) \, dx$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu(\ln x) dx &= \int x' \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - \int \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = \\ &= x \eta\mu(\ln x) - \int x' \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \eta\mu(\ln x) dx = \\ &= x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int \eta\mu(\ln x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } \int \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int \eta\mu(\ln x) dx$$

(μεταφέροντας το $\int \eta\mu(\ln x) dx$ στο αριστερό μέλος)

$$\Rightarrow 2 \int \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \eta\mu(\ln x) dx = \frac{x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x)}{2} + c$$

■

Παρατήρηση (αναδρομικές σχέσεις)

Πολλές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης το οποίο εξαρτάται από κάποιο ακέραιο αριθμό n (συνήθως κάποιος από τους παράγοντες της συνάρτησης που θέλουμε να ολοκληρώσουμε είναι υψωμένος στη δύναμη n). Στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό καταλήγουμε σε μια **αναδρομική σχέση**, μια σχέση δηλαδή που συνδέει αυτό το ολοκλήρωμα με κάποιο άλλο, του ίδιου τύπου, ολοκλήρωμα αλλά το δεύτερο ολοκλήρωμα εξαρτάται τώρα από κάποιον από τους προηγούμενους (του n) ακέραιους (δηλαδή τον $n-1$, $n-2$, ...).

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό του πως υπολογίζουμε τέτοιου τύπου ολοκληρώματα.

Εφαρμογή 5

(α) Εάν $I_n = \int x^n e^x dx$, τότε να δειχθεί ότι: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$

(β) να υπολογιστεί το I_3

(γ) να υπολογιστεί το $\int_0^1 x^3 e^x dx$

Λύση

(α) Έχουμε, κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned}I_n &= \int x^n e^x dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x - \int e^x (x^n)' dx = \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}\end{aligned}$$

(β) Από το (α) έχουμε:

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_2$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1$$

$$I_1 = x e^x - I_0 \quad \text{οπου} \quad I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + c$$

Δηλαδή:

$$I_3 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - I_0)) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$

(γ) χρησιμοποιώντας το (β), έχουμε:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = \left(x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c \right) \Big|_0^1 = e - 3e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e$$

■

Εφαρμογή 6

Αν $I_n = \int (\ln x)^n dx$, για $n \in \mathbb{N}^*$ και $x \in (0, +\infty)$,

(α) να αποδείξετε την αναδρομική σχέση $I_n + nI_{n-1} = x(\ln x)^n$

(β) να υπολογίσετε το I_3 .

Λύση

(α) Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_n &= \int (x)' (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = \\ &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1} \end{aligned}$$

οπότε ισχύει η αναδρομική σχέση : $I_n + nI_{n-1} = x(\ln x)^n$.

(β) Για να υπολογίσουμε το I_3 , υπολογίζουμε αρχικά το I_1 :

$$I_1 = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

και κατόπιν χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση :

$$I_2 + 2I_1 = x(\ln x)^2 \quad \text{ή} \quad I_2 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$$

$$I_3 + 3I_2 = x(\ln x)^3 \quad \text{ή} \quad I_3 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + c.$$

■

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**Πρόταση 1**

Έστω $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: g(I) \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η g είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η f είναι συνεχής και έστω ότι $\int f(x)dx = F(x) + c$. Το ολοκλήρωμα:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(g(x)) + c$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$(α) \int \frac{1}{x+2} dx \quad (β) \int 3x(x^2+2)^2 dx \quad (γ) \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx \quad (δ) \int \eta\mu 2x dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε $u=x+2 \Rightarrow du=dx$ και

$$\int \frac{1}{x+2} dx \stackrel{\substack{u=x+2 \\ du=dx}}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c \stackrel{u=x+2}{=} \ln|x+2| + c$$

(β) Θέτουμε $u=x^2+2 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\int 3x(x^2+2)^2 dx = \frac{3}{2} \int 2x(x^2+2)^2 dx = \frac{3}{2} \int u^2 du = \frac{3}{2} \frac{u^3}{3} + c \stackrel{u=x^2+2}{=} \frac{(x^2+2)^3}{2} + c$$

(γ) Θέτουμε $u=1-2x^2 \Rightarrow du=-4x dx$ και

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx &= -\frac{1}{4} \int -4x\sqrt{1-2x^2} dx = -\frac{3}{4} \int \sqrt{u} du = -\frac{3}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{3}{4} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{3}{4} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= -\frac{2}{4} u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{2} \sqrt{u^3} + c \stackrel{u=1-2x^2}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{(1-2x^2)^3} + c \end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $u=2x \Rightarrow du=2dx$ και

$$\int \eta\mu 2x dx = \frac{1}{2} \int \eta\mu u du = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu u + c \stackrel{u=2x}{=} -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x + c$$

■

Παρατήρηση

Όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα με αντικατάσταση, προσοχή πρέπει να γίνεται αλλαγή και στα όρια ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx$.

Λύση**1^{ος} τρόπος**

Θέτουμε $u=x^3+2 \Rightarrow du=3x^2 dx$ και (για τα νέα όρια ολοκλήρωσης):

εάν $x=0 \Rightarrow u=0^3+2=2$ ενώ εάν $x=2 \Rightarrow u=2^3+2=10$.

Επομένως:

$$\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int_0^2 3x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int_2^{10} u^5 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} \Big|_2^{10} = \frac{1}{18} \cdot 10^6 - \frac{1}{18} \cdot 2^6 = \dots$$

2^{ος} τρόπος

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα, και χρησιμοποιούμε τα παλιά όρια ολοκλήρωσης

Θέτουμε $u=x^3+2 \Rightarrow du=3x^2 dx$. Επομένως

$$\int x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18} \cdot u^6 + c = \frac{1}{18} \cdot (x^3+2)^6 + c$$

Οπότε:

$$\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{18} \cdot (x^3+2)^6 \Big|_0^2 = \frac{1}{18} \cdot (2^3+2)^6 - \frac{1}{18} \cdot (0^3+2)^6 = \frac{1}{18} \cdot 10^6 - \frac{1}{18} \cdot 2^6 = \dots$$

■

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(α) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (β) \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (γ) \int x e^{x^2} dx \quad (δ) \int \frac{x}{(x^2+1)^{100}} dx$$

$$(ε) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (στ) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (ζ) \int \frac{\varepsilon \varphi^7 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε: $u=1-x^2 \Rightarrow du=-2x dx$ και

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot u^{\frac{1}{2}+1} + c = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε: $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

(γ) Θέτουμε: $u=x^2 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

(δ) Θέτουμε: $u=x^2+1 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^{100}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^{100}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{100}} du = \frac{1}{2} \int u^{-100} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-100+1} u^{-100+1} + c = \\ &= -\frac{1}{198} \frac{1}{u^{99}} + c \stackrel{u=x^2+1}{=} -\frac{1}{198} \frac{1}{(x^2+1)^{99}} + c \end{aligned}$$

(ε) Θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c \stackrel{u=\ln x}{=} \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

(στ) Θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και $x=e^u$, οπότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int \ln x \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx = \int u \frac{1}{e^u} du = \int u e^{-u} du = \int u (-e^{-u})' du = \\ &= -u e^{-u} + \int u' e^{-u} du = -u e^{-u} + \int e^{-u} du = -u e^{-u} - e^{-u} + c = -\frac{u}{e^u} - \frac{1}{e^u} + c \stackrel{u=\ln x}{=} \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

(αποτέλεσμα που συμπίπτει με την εφαρμογή 2(β) κατά παράγοντες).

(ζ) Κάνουμε την αντικατάσταση: $u = \varepsilon\varphi x \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ οπότε:

$$\int \frac{\varepsilon\varphi^7 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \varepsilon\varphi^7 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c \stackrel{u=\varepsilon\varphi x}{=} \frac{\varepsilon\varphi^8 x}{8} + c$$

■

Εφαρμογή 3

(α) Να δείξετε ότι: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \quad (ii) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx \quad (iii) \int \epsilon\phi x \, dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε $u=f(x) \Rightarrow du=f'(x)dx$ και

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$

(β) (i) για το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ παρατηρούμε ότι:

$$f(x)=x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=2x+1$$

οπότε (χρησιμοποιώντας το (α)):

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx \stackrel{(a)}{=} \ln|x^2+x+1| + c$$

(ii) για το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ παρατηρούμε ότι:

$$f(x)=x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x+2$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το κλάσμα με 2 (και χρησιμοποιώντας το (α)):

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + c \end{aligned}$$

$$(iii) \int \epsilon\phi x \, dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{-(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

■

Εφαρμογή 4

Εάν είναι γνωστό ότι: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{τοξ}\epsilon\phi x + c$ (όπου $f(x)=\text{τοξ}\epsilon\phi x$ μια συνάρτηση που καλείται **τόξο εφαπτομένης** και είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης π.χ $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \text{τοξ}\epsilon\phi 1 = \frac{\pi}{4}$), τότε να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{1}{9x^2+1} dx \quad (ii) \int \frac{1}{x^2+5} dx \quad (iii) \int \frac{1}{9x^2+5} dx$$

Λύση

(i) $\int \frac{1}{9x^2+1} dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1} dx$ Θέτοντας: $u=3x \Rightarrow du=3dx$ έχουμε:

$$\int \frac{1}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{3} \text{τοξεφ} u + c = \frac{1}{3} \text{τοξεφ}(3x) + c$$

(ii) Βγάζοντας κοινό παράγοντα το 5 από τον παρονομαστή έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2+5} dx = \int \frac{1}{5\left(\frac{x^2}{5}+1\right)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

και θέτοντας: $u = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}} dx$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} u + c = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c \end{aligned}$$

(iii) Βγάζοντας και πάλι κοινό παράγοντα το 5 από το παρονομαστή έχουμε:

$$\int \frac{1}{9x^2+5} dx = \int \frac{1}{(3x)^2+5} dx = \int \frac{1}{5\left(\frac{(3x)^2}{5}+1\right)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

και θέτοντας: $u = \frac{3x}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{3}{\sqrt{5}} dx$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx &= \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \text{τοξεφ} u + c = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \text{τοξεφ}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \text{τοξεφ}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Από την παραπάνω εφαρμογή συμπεραίνουμε ότι:

$$\int \frac{1}{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{τοξεφ}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} x\right) + c, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Εφαρμογή 5 (μη-παραγοντοποίηση τριωνύμου του παρονομαστή)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Λύση

Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, γιατί $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, οπότε δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Στην περίπτωση αυτή συμπληρώνουμε το τετράγωνο, ως εξής:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + 1 = (x+2)^2 + 1$$

Οπότε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx \stackrel{u=x+2}{\underset{du=dx}{=}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \text{τοξεφ} u + c = \text{τοξεφ}(x+2) + c$$

•