

14. Δυναμοσειρές

Μια **δυναμοσειρά** είναι μια άπειρη σειρά της μορφής:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-c) + \alpha_2(x-c)^2 + \alpha_3(x-c)^3 + \dots$$

όπου α_n είναι ο συντελεστής του $n^{\text{ου}}$ όρου, c είναι μια σταθερά, το δε x μεταβάλλεται γύρω από το c (για τον λόγο αυτό, λέμε ότι η σειρά έχει **κέντρο** το c ή είναι **δυναμοσειρά γύρω από το σημείο c**). Η σειρά αυτή είναι συνήθως (όχι όμως απαραίτητα) η σειρά Taylor κάποιας γνωστής συνάρτησης.

Σε μερικές περιπτώσεις το $c=0$ π.χ όταν θεωρούμε τη σειρά Maclaurin. Στην περίπτωση αυτή, η δυναμοσειρά έχει την απλούστερη μορφή:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

Παραδείγματα

(α) η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

για $|x| < 1$, είναι ένα από τα σπουδαιότερα παραδείγματα δυναμοσειράς.

(β) Ένα ακόμα παράδειγμα είναι αυτό της **εκθετικής** συνάρτησης:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(γ) Ένα τρίτο παράδειγμα είναι αυτό της συνάρτησης του **ημιτόνου**:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Αυτά είναι επίσης παραδείγματα σειράς Taylor.

Ακτίνα σύγκλισης

Μια δυναμοσειρά θα συγκλίνει για μερικές τιμές του x και θα αποκλίνει για άλλες. Όλες οι δυναμοσειρές συγκλίνουν στο σημείο $x = c$. Εάν το c δεν είναι το μόνο σημείο που συγκλίνει η δυναμοσειρά, θα υπάρχει ένας αριθμός r με $0 < r \leq \infty$, τ.ω. η δυναμοσειρά να συγκλίνει όταν $|x - c| < r$ και να αποκλίνει όταν $|x - c| > r$. Ο αριθμός r καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Η ακτίνα σύγκλισης, εφ' όσον το όριο υπάρχει, δίνεται από τον τύπο:

$$r^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \quad (*)$$

Η δυναμοσειρά θα συγκλίνει απόλυτα όταν $|x - c| < r$. Για $|x - c| = r$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε, γενικά, αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αντικαθιστώντας όμως το $x = c$ προκύπτει μια σειρά της οποίας η σύγκλιση εξετάζεται με ένα από τα γνωστά κριτήρια.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Να εξετάσετε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς και στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης.

Λύση

Πρώτος τρόπος: Είναι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

Λίγο διαφορετικά:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt[1]{1} = 1$$

και από τα δύο αυτά όρια βρίσκουμε (με χρήση του τύπου (*)) ότι, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(1-1, 1+1) = (0, 2)$, στο οποίο θα πρέπει να επισυνάψουμε ένα ή κανένα ή και τα δύο άκρα του.

Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{εναλλάσσουσα})$$

και συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz γιατί η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι

$$(i) \text{ φθίνουσα: } n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \alpha_n \text{ και}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και αποκλίνει γιατί είναι σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p \leq 1$ αλλά και γιατί είναι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[0,2)$.

Δεύτερος τρόπος: Είναι (με τη βοήθεια του κριτηρίου του λόγου, των απολύτων τιμών)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x-1| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}} \cdot |x-1| = |x-1|$$

ή λίγο διαφορετικά (με τη βοήθεια του κριτηρίου της $n^{\text{οστης}}$ ρίζας)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} |x-1| = |x-1|$$

Άρα η σειρά συγκλίνει όταν $|x-1| < 1$ και αποκλίνει όταν $|x-1| > 1$. Και από τα δύο αυτά όρια βρίσκουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με 1 και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(1-1, 1+1) = (0,2)$, στο οποίο θα πρέπει να επισυνάψουμε ένα ή κανένα ή και τα δύο άκρα του. Συνεχίζουμε όπως με τον πρώτο τρόπο.

•

Εφαρμογή 2

(α) Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Τι μπορείτε να πείτε για την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης;

(β) Εάν είναι γνωστό ότι: $\text{τοξεφ} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, να δείξετε ότι $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2 \quad (\text{γιατί } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1)$$

Εάν $-1 < x < 1$ (δηλαδή $x^2 < 1$), τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα, οπότε συγκλίνει.

Για $x = -1$, η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

η οποία είναι εναλλάσσουσα (αρμονική), οπότε συγκλίνει (απόδειξη ανάλογη της εφαρμογής 1, με το κριτήριο του Leibniz).

Επίσης, για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

η οποία είναι και αυτή εναλλάσσουσα αρμονική, οπότε συγκλίνει.

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, είναι: $[-1, 1]$, ενώ η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $R = 1$

(β) Επειδή $\text{τοξεφ}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ (για τα x που ανήκουν στο διάστημα σύγκλισης), έχουμε για $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \text{τοξεφ}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

•

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1) \times |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad (> 1)$$

γιά όλα τα x , εκτός από την περίπτωση που το $x=0$ (και το άθροισμα θα είναι 0). Το διάστημα σύγκλισης σε αυτή την περίπτωση είναι μόνο το σημείο 0 και η ακτίνα σύγκλισης $R=0$.

•

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό. Επομένως, το διάστημα σύγκλισης σε αυτή την περίπτωση είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $R = \infty$.

•

Πρόταση (παράγωγος δυναμοσειράς)

Εάν έχουμε μια δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ που συγκλίνει σε κάποιο διάστημα (x_0-r, x_0+r) , για (κάποιο) $r \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης ισχύει ότι, η παράγωγός της $f(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

Δηλαδή, η παράγωγος δυναμοσειρά προκύπτει παραγωγίζοντας κάθε έναν από τους όρους της αρχικής σειράς και αθροίζοντάς τους.

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί η (δυναμοσειρά) σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (στο διάστημα σύγκλισής της).

Λύση

1^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας το ότι: για $-1 < x < 1$ έχουμε:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+.....$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+(-x^2)^4+..... = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-.....$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής με x παίρνουμε τελικά:

$$\frac{x}{1+x^2} = x-x^3+x^5-x^7+x^9-..... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

2^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας το ότι: για $-1 < x < 1$ έχουμε:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$$

προκύπτει ότι:

$$\ln(1+x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + \frac{(x^2)^5}{5} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} -$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε:

$$\left(\ln(1+x^2) \right)' = \frac{2x}{1+x^2} = 2x - \frac{4x^3}{2} + \frac{6x^5}{3} - \frac{8x^7}{4} + \frac{10x^9}{5} = 2(x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

αποτέλεσμα που συμπίπτει με το προηγούμενο

■