

13. ΣΕΙΡΑ TAYLOR

Είναι γνωστό ότι, οι καλύτερες συναρτήσεις από πλευράς ιδιοτήτων (τιμές, ρίζες, παράγωγος, ολοκλήρωμα ακόμα και η γραφική παράσταση) είναι τα **πολυνώνυμα**. Ένα **πολυνώνιο n-οστού βαθμού** με πραγματικούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k=0,1,\dots,n, \quad \alpha_n \neq 0$$

Όταν έχουμε μια «πολύπλοκη» συνάρτηση **f**, προσπαθούμε να την «προσεγγίσουμε» τοπικά με ένα πολυνώνιο (αντικαθιστούμε δηλαδή τη συνάρτηση «τοπικά», δηλαδή γύρω από ένα σημείο **x=a**, με ένα κατάλληλο πολυνώνιο έτσι ώστε το σφάλμα αυτής της αντικατάστασης να είναι μικρό). Το **σφάλμα** της αντικατάστασης (προσέγγισης) της συνάρτησης **f** από ένα πολυνώνιο $P_n(x)$ δίνεται από την (συνάρτηση):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Ένα τέτοιο προσεγγιστικό πολυνώνιο, για προσέγγιση της συνάρτησης **f** στο σημείο **a**, είναι το λεγόμενο **προσεγγιστικό πολυνώνιο Taylor n^{ου} βαθμού** της **f** (στο σημείο **x=a**) και ορίζεται από τη σχέση:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Στην περίπτωση που το **a=0** έχουμε το **n^{ου} βαθμού προσεγγιστικό πολυνώνιο Maclaurin** της **f**, το οποίο θα έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Το **σφάλμα της προσέγγισης** μπορεί ναδειχθεί (ένας από τους τρόπους υπολογισμού του, υπάρχουν αρκετοί άλλοι) ότι είναι ίσο με:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a,x)$$

Έτσι η συνάρτηση **f** είναι ίση με (στην περιοχή του σημείου **x=a**, δηλαδή σε ένα ανοικτό διάστημα **I** που περιέχει το σημείο **a**):

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Η μορφή αυτή καλείται **ανάπτυγμα Taylor της f στο σημείο x=a**.

Αν **a=0** τότε το ανάπτυγμα έχει την μορφή:

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

το οποίο καλείται **ανάπτυγμα Maclaurin της f**.

Αν η συνάρτηση **f** έχει παράγωγο κάθε τάξης, τότε η σειρά Taylor της f στο σημείο x=a είναι ίση με:

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Αν $\alpha=0$, η σειρά Taylor της f καλείται **σειρά Maclaurin**. Δηλαδή η σειρά Maclaurin είναι της μορφής:

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

Παρατήρηση 1

Εάν η συνάρτηση f έχει παράγωγο κάθε τάξης και το υπόλοιπο R_n τείνει στο μηδέν, για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή I που περιέχει το σημείο α , τότε η συνάρτηση f περιγράφεται σε ένα σημείο $x=\alpha$ με τη βοήθεια της σειράς Taylor (στο σημείο $x=\alpha$), δηλαδή:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ή με τη βοήθεια της σειράς Maclaurin, στο σημείο $x=0$, δηλαδή:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι, η **σειρά** (Taylor ή Maclaurin) **συγκλίνει** στη συνάρτηση f .

Τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο να υπολογίσει κανείς το υπόλοιπο $R_n(x)$. Μια εκτίμηση του υπολοίπου αυτού δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα εκτίμησης του υπολοίπου

Αν υπάρχουν θετικές σταθερές M, r τέτοιες ώστε $|f^{(n+1)}(t)| \leq M r^{n+1}$, $\forall t \in (\alpha, x)$, τότε το υπόλοιπο $R_n(x)$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|R_n(x)| \leq M r^{n+1} \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν επιπλέον η f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη, για κάθε n , σε μια περιοχή I του σημείου α , τότε το υπόλοιπο $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ και η σειρά Taylor της f συγκλίνει στην συνάρτηση f .

Εφαρμογή 1

(α) Να βρεθεί το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$.

(β) Να βρεθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$.

(β) Για ποια σημεία (αν υπάρχουν) συγκλίνει η σειρά στο $\frac{1}{x}$; Ποιο το **διάστημα**

σύγκλισης και ποια η **ακτίνα σύγκλισης** της σειράς αυτής;

Λύση

(α) Βρίσκοντας τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο

$\alpha=2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow & f(2) = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = 2\frac{1}{2^3} = (-1)^2 2! \frac{1}{2^3} \end{aligned}$$

Επομένως, το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$ είναι:

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2! \frac{1}{2^3}}{2!}(x-2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2$$

(α) Βρίσκοντας τις διαδοχικές παραγώγους της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow & f(2) = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = 2\frac{1}{2^3} = (-1)^2 2! \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= -2 \cdot 3 \frac{1}{x^4} & \Rightarrow & f'''(2) = -2 \cdot 3 \frac{1}{2^4} = (-1)^3 3! \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Η **σειρά Taylor** της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$, είναι:

$$\begin{aligned} & f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots = \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2! \frac{1}{2^3}}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{(-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}}{n!}(x-2)^n + \dots = \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n + \dots = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας, με $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$, η παραπάνω σειρά συγκλίνει εάν:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Αλλά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n\right|} = \frac{|x-2|}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{2} < 1$$

Δηλαδή η σειρά συγκλίνει εάν:

$$\frac{|x-2|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

Για $x=4$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (4-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots$$

Δηλαδή, η σειρά αποκλίνει.

Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (0-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots = +\infty$$

και πάλι η σειρά αποκλίνει.

Άρα η σειρά συγκλίνει στα σημεία του διαστήματος (0,4). Το διάστημα (0,4) καλείται **διάστημα σύγκλισης** της σειράς, ενώ το μισό του μήκους του εν λόγω διαστήματος (όταν το διάστημα είναι πεπερασμένο) καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της σειράς και συμβολίζεται με **R**, δηλαδή εδώ $R=2$.

Για όλα τα x : $0 < x < 4$, επειδή η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση, έχουμε:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$$

■

Εφαρμογή 2

(α) Να βρεθεί το 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

(β) Να βρεθεί η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Λύση

(α) Βρίσκουμε τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης και τρίτης τάξης της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ στο σημείο $a=2$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow & f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\
 f''(x) &= 2 \frac{1}{(1-x)^3} & \Rightarrow & f''(0) = 2 \frac{1}{(1-0)^3} = 2! \\
 f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-x)^4} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 3!
 \end{aligned}$$

Επομένως, το 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι ίσο με:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 0 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 = x + x^2 + x^3$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(0) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1 \\
 f''(x) &= 2 \frac{1}{(1-x)^3} & \Rightarrow & f''(0) = 2 \frac{1}{(1-0)^3} = 2! \\
 f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 3! \\
 & \dots\dots\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!
 \end{aligned}$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ισούται με:

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Παρατήρηση 2

(1) Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλέγει κανείς αν χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\frac{1}{1-x}$ ισούται με:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Οπότε $\frac{x}{1-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

- (2) Η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)$ για όλα τα x : $-1 < x < 1$ γιατί, χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου με $a_n = x^n$, έχουμε (για σύγκλιση):

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Στο σημείο $x=1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1+1+1\ldots = +\infty$ δηλαδή αποκλίνει ενώ στο

$x=-1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1\ldots$ και πάλι αποκλίνει Άρα, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς είναι το $(-1,1)$ και η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $R=1$.

Για όλα τα x : $-1 < x < 1$, επειδή η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

■

Εφαρμογή 3

Χρησιμοποιώντας ότι $e < 4$, υπολογίστε το $e (= e^1)$ με ακρίβεια $3^{\text{ων}}$ δεκαδικών ψηφίων ή ισοδύναμα με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

Λύση

Για τον παραπάνω υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε ένα $n^{\text{οστον}}$ πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση e^x (με n προς προσδιορισμό). Είναι γνωστό ότι το σφάλμα (προσέγγισης/εκτίμησης) σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{για κάποιο } \xi$$

Αλλά, $(e^x)', (e^x)'' , (e^x)''' , \ldots , (e^x)^{(n)} = e^x$, $\forall n$, επομένως $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$ και έτσι:

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{4}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

(γιατί $x=1 \Rightarrow e^x = e = 2.71828 < 4$). Οπότε:

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{4}{(n+1)!} |1|^{n+1} = \frac{4}{(n+1)!}$$

Θέλουμε:

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{4}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} = 0,001.$$

Αν $n=1$, τότε: $\frac{4}{(1+1)!} = 2 > 0,001$

Αν $n=2$, τότε: $\frac{4}{(2+1)!} = \frac{2}{3} = 0,666\ldots > 0,001$

$$\text{Αν } n=3, \text{ τότε: } \frac{4}{(3+1)!} = \frac{4}{24} = 0,166... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=4, \text{ τότε: } \frac{4}{(4+1)!} = \frac{4}{120} = 0,033... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=5, \text{ τότε: } \frac{4}{(5+1)!} = \frac{4}{720} = 0,0055... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=6, \text{ τότε: } \frac{4}{(6+1)!} = 0,0007... < 0,001.$$

Επομένως χρειαζόμαστε ένα 6^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση e^x και:

$$\begin{aligned} e^1 &\simeq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \\ &\simeq 1 + 1 + 0,167 + 0,042 + 0,008 + 0,001 = 2,718 \quad (\text{πραγματική τιμή } e \simeq 2,7182818...) \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί ο $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

Λύση

Για τον παραπάνω υπολογισμό, επειδή $\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right)$, θα χρησιμοποιήσουμε ένα $n^{\text{ο}}$ πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$ (με n προς προσδιορισμό). Είναι γνωστό ότι το σφάλμα (προσέγγισης/εκτίμησης) σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{για κάποιο } \xi$$

$$\text{Αλλά, } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ οπότε:}$$

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right|$$

Θέλουμε

$$\left| R_{n+1}\left(\frac{1}{5}\right) \right| \leq \left| \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)} \right| < 10^{-3} = 0,001$$

$$\text{Αν } n=1, \text{ τότε: } \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{3} = 0,013 > 0,001$$

$$\text{Αν } n=2, \text{ τότε: } \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{4} = 0,002 > 0,001$$

$$\text{Αν } n=3, \text{ τότε: } \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4}{5} = 0,00032 < 0,001$$

Επομένως χρειαζόμαστε ένα 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$ και:

$$\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} = 0,1827 \quad (\text{πραγματική τιμή } 0,18232\dots)$$

■

Η σειρά Maclaurin μερικών βασικών συναρτήσεων δίνεται παρακάτω.

Σειρά Maclaurin	Διάστημα σύγκλισης
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$-1 < x < 1$
$\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x < 1$

Εφαρμογή 5

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin των συναρτήσεων:

$$\alpha) f_1(x) = e^{ax} \quad \beta) f_2(x) = x^2 e^{-x} \quad \gamma) f_3(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$$

Λύση

Στον υπολογισμό της σειράς Maclaurin των παραπάνω συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τη σειρά Maclaurin ήδη γνωστών συναρτήσεων.

(α) Είναι γνωστό ότι:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f_1(x)=e^{\alpha x}$ ισούται με:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = 1+\alpha x+\frac{(\alpha x)^2}{2!}+\frac{(\alpha x)^3}{3!}+\frac{(\alpha x)^4}{4!}+.....= \\ &= 1+\alpha x+\frac{\alpha^2}{2!}x^2+\frac{\alpha^3}{3!}x^3+\frac{\alpha^4}{4!}x^4+..... \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει εάν υπολογίσουμε τις διαδοχικές παραγώγους της συνάρτησης $f_1(x)=e^{\alpha x}$ (εργαζόμενοι ανάλογα με την εφαρμογή 1).

(β) Πάλι, από το ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+.....= \\ &= 1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+..... \end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} x^2 e^{-x} &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = x^2 \left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+..... \right) = \\ &= x^2-x^3+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^5+\frac{1}{4!}x^6+..... \end{aligned}$$

(γ) Είναι γνωστό ότι:
$$\eta_{\mu x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.....$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f_3(x)=\eta_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)$ ισούται με

$$\begin{aligned} \eta_{\mu x}\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{7!} + \\ &= \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 7!} + \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 4

Με τη βοήθεια των σειρών Taylor (ή Maclaurin) μπορούμε να υπολογίσουμε αθροίσματα άλλων σειρών.

Εφαρμογή 6

(1) Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα:

$$1 - \ln 3 + \frac{1}{2!}(\ln 3)^2 - \frac{1}{3!}(\ln 3)^3 + \frac{1}{4!}(\ln 3)^4 + \dots$$

(2) Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα:

$$\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \frac{1}{7!}\pi^7 + \dots$$

Λύση

(1) Η σειρά «μοιάζει» με την $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$. Άρα η δοθείσα σειρά είναι ίση με :

$$1 - \ln 3 + \frac{1}{2!}(\ln 3)^2 - \frac{1}{3!}(\ln 3)^3 + \frac{1}{4!}(\ln 3)^4 + \dots = e^{-\ln 3} = e^{\ln \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

(2) Όμοια ξέρουμε ότι $\eta \mu x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$$\text{Άρα } \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots = \eta \mu \pi = 0.$$

■

Εφαρμογή 7

Υπολογίστε το 3^ο βαθμού (προσεγγιστικό) πολώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Επίσης το 4^ο και 6^ο βαθμού και να γίνει η γραφική παράσταση των πολωνύμων και της συνάρτησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

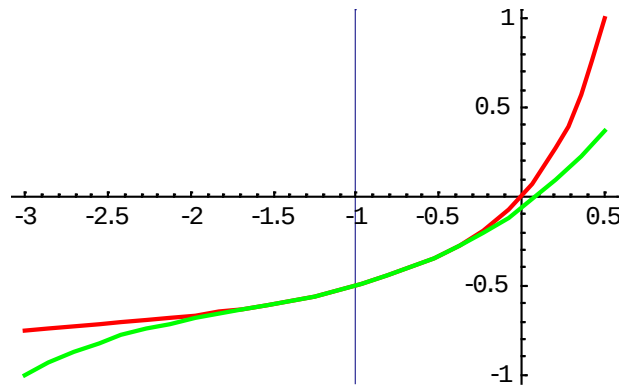
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(-1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2 \frac{1}{(x-1)^3} & \Rightarrow & f''(-1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = 2! \cdot \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(-1) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} = 3! \cdot \frac{1}{2^4} \\ & \dots & & \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(-1) = n! \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Άρα το $n^{\text{ο}}$ βαθμού πολώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για την $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι ίσο με:

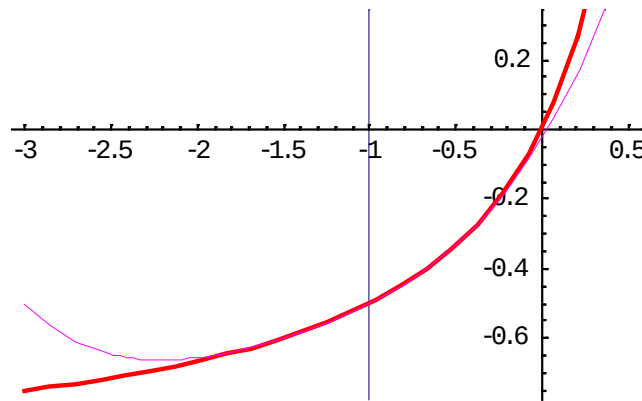
$$\begin{aligned} f(-1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (x-(-1))^k &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k!}{2^{k+1}k!} (x-(-1))^k = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} (x+1)^1 + \frac{1}{2^3} (x+1)^2 + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} (x+1)^n \end{aligned}$$

(α) **3^ο βαθμού:** $P_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3$



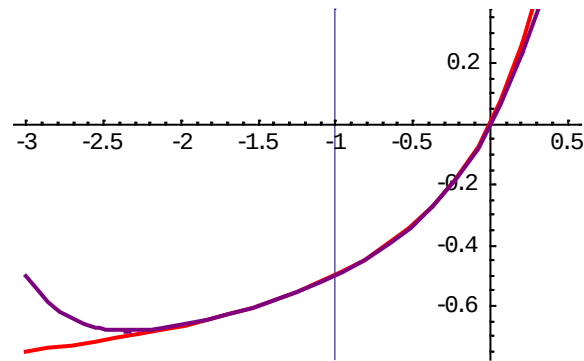
(με κόκκινο χρώμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης)

(β) **4^ο βαθμού:** $P_4(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4$

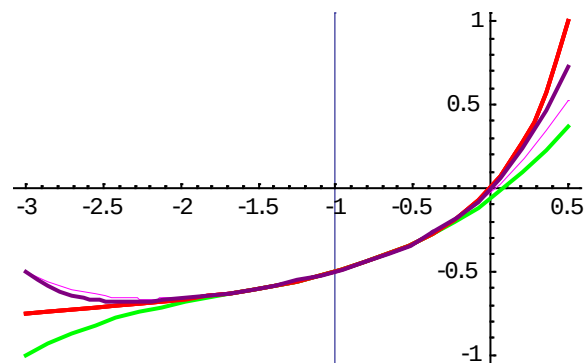


(γ) **6^ο βαθμού:**

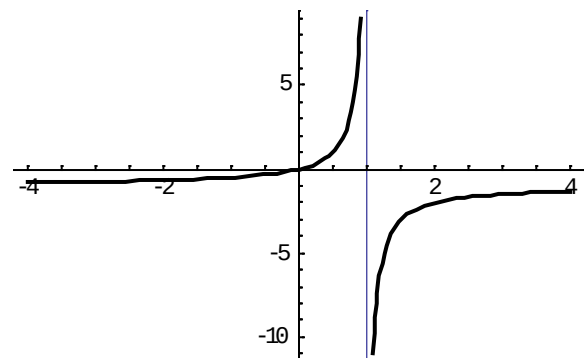
$$P_6(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4 + \frac{1}{64}(x+1)^5 + \frac{1}{128}(x+1)^6$$



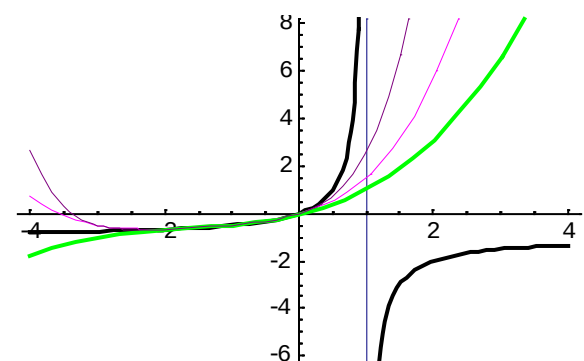
(δ) Στο παρακάτω γράφημα υπάρχει η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (μερική) και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού.



(ε) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ φαίνεται παρακάτω:



(στ) Γραφική Παράσταση $f(x) = \frac{x}{1-x}$ και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού.



Από το σχήμα είναι φανερό ότι η εκτίμηση της f , με τη βοήθεια των πολωνύμων Taylor στο σημείο $\alpha = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού, είναι καλή γύρω από το σημείο $\alpha = -1$

■

Παρατήρηση 5

Με τη βοήθεια των σειρών ή αναπτυγμάτων Taylor (ή Maclaurin) μπορούμε να υπολογίσουμε

(α) προσεγγιστικές τιμές συναρτήσεων

(β) ολοκληρώματα συναρτήσεων κ.λ.π.

Εφαρμογή 8

Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή του $\ln 0,97$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Άρα για $x = -0,03$ έχουμε

$$\ln 0,97 = \ln(1 - 0,03) = -0,03 - \frac{(-0,03)^2}{2!} + \frac{(-0,03)^3}{3!} - \frac{(-0,03)^4}{4!} + \dots \approx -0,0304592$$

■

Εφαρμογή 9

Υπολογίστε (προσεγγιστικά) το:

$$\int_0^1 \frac{\eta \mu x}{x} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin:

$$\eta \mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\eta \mu x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 \approx 0,946083 \end{aligned}$$

(το σφάλμα της προσέγγισης χρησιμοποιώντας π.χ. του τέσσερες πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin είναι το πολύ 0,0000003(!!!)).

■