

12. Εφαρμογές των παραγώγων

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν δύο αριθμοί που το άθροισμά τους να είναι ίσο με 20 και το γινόμενό τους το μέγιστο δυνατό.

Λύση

Αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε $x+y=20$, δηλαδή ο ένας αριθμός είναι ο x και ο άλλος ο $(y=) 20-x$. Άρα το γινόμενό τους:

$$P(x)=x(20-x)=20x-x^2$$

Για να είναι το γινόμενό τους μέγιστο θα πρέπει:

$$P'(x)=(20x-x^2)'=20-2x=0 \Rightarrow x=10$$

$$(P''(x)=-2 \Rightarrow P''(10)=-2 \text{ δηλ. } x=10 \text{ μέγιστο})$$

Αλλά $x=10 \Rightarrow y=20-x=10$ δηλαδή το μέγιστο γινόμενο επιτυγχάνεται για $x=y=10$

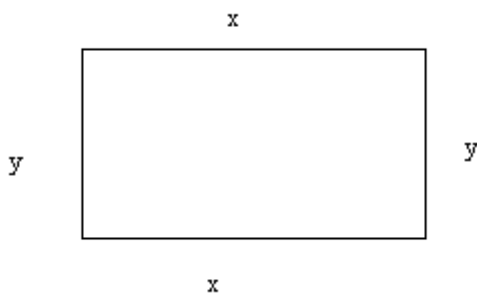
■

Εφαρμογή 2

Βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο 100 μέτρα, του οποίου το εμβαδόν να είναι το μέγιστο δυνατό.

Λύση

Εάν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου,



τότε η περίμετρος του είναι ίση με $2x+2y=100 \Rightarrow x+y=50$, το δε εμβαδόν του ισούται με

$$E(x)=x \cdot y=x(50-x)=50x-x^2$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \leq x \leq 50$ (;). Για να βρούμε το μέγιστο εμβαδόν, βρίσκουμε:

$$E'(x)=(50x-x^2)'=50-2x=0 \Rightarrow x=25$$

Και επειδή $0 \leq x \leq 50$, το μέγιστο θα συμβαίνει σε κάποιο από τα σημεία:

$x=0$ (άκρο διαστήματος)

$x=25$ (ακρότατο)

$x=50$ (άκρο διαστήματος)

Αλλά $E(0)=50 \cdot 0 - 0^2 = 0$, $E(25)=50 \cdot 25 - 25^2 = 625$, $E(50)=50 \cdot 50 - 50^2 = 0$, δηλαδή το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν (και περίμετρο 100 μέτρα) έχει διαστάσεις

$$x=25 \quad \& \quad y=50-x=50-25=25 \text{ δηλαδή } x=y=25 \text{ (τετράγωνο).}$$

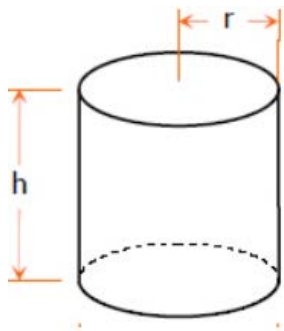
■

Εφαρμογή 3

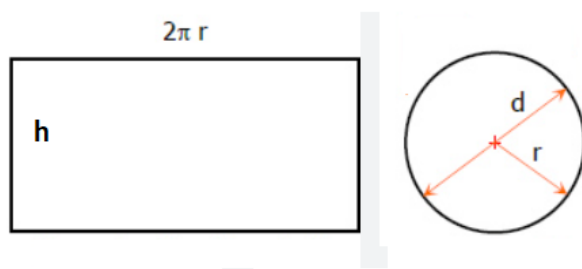
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο λαδιού στο σχήμα ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου, ώστε να περιέχει 1 lt λαδιού. Ποιές θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου ώστε να απαιτείται για την κατασκευή του η μικρότερη ποσότητα υλικού.

Λύση

Έστω ότι το (κυλινδρικό) δοχείο που θέλουμε να κατασκευάσουμε έχει ακτίνα βάσης r και ύψος h .



Το υλικό που χρειάζεται για την κατασκευή του έχει να κάνει με το εμβαδόν της (εξωτερικής) επιφάνειάς του, η οποία αποτελείται από ένα ορθογώνιο (με διαστάσεις: η μία ίση με το ύψος του κυλίνδρου και η 2^η ίση με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου) και 2 κύκλους με ακτίνα r (πάνω και κάτω μέρος του δοχείου).



Το εμβαδόν λοιπόν της επιφάνειας του δοχείου είναι ίσο με:

$$E(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Ο όγκος του δοχείου δίνεται από τη σχέση:

$$V(h) = \pi r^2 h$$

Αλλά $V(r) = 1 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$, οπότε το εμβαδόν της επιφάνειας γίνεται:

$$E(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2 \frac{1}{r}$$

της οποίας ζητάμε το ελάχιστο. Αλλά:

$$E'(r) = 2 \cdot 2\pi r - 2 \frac{1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2\pi r = 2 \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Επιπλέον:

$$E''(r) = 2 \cdot 2\pi + 2 \cdot 2 \frac{1}{r^3} = 4\pi + 4 \frac{1}{r^3} > 0 \text{ (πάντα)}$$

και $E''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + 4 \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^3} = 4\pi + 8\pi = 12\pi$, οπότε το σημείο $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ είναι σημείο ελαχίστου.

Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι:

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \& \quad h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \right)^2} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

■

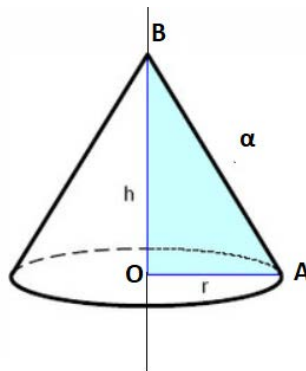
Εφαρμογή 4.

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους α περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές ώστε να παράγει έναν ορθό κυκλικό κώνο. Βρείτε τις διαστάσεις του κώνου μέγιστου όγκου (δηλαδή την ακτίνα βάσης του και το ύψος).

Λύση

Εάν r είναι η ακτίνα βάσης του κώνου και h το ύψος του, τότε ο όγκος του είναι ίσος με:

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε: $r^2 + h^2 = \alpha^2 \Rightarrow r^2 = \alpha^2 - h^2$ οπότε ο όγκος του κώνου γίνεται:

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (\alpha^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi \alpha^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{3} \pi \alpha^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 \right) = \frac{1}{3} \pi \alpha^2 - \frac{1}{3} 3 \pi h^2 = 0 \Leftrightarrow 3h^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Επιπλέον:

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2} = \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{3} \pi \alpha^2 - \pi h^2 \right) = -2\pi h < 0$$

οπότε και $\frac{d^2V\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}{dh^2} = -2\pi \frac{\alpha}{\sqrt{3}} < 0$ δηλαδή το σημείο $h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ είναι σημείο μεγίστου. Τέλος, οι ζητούμενες διαστάσεις του κώνου είναι ίσες με:

$$h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \& \quad r^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha$$

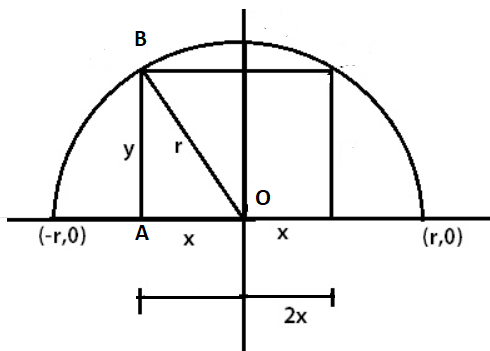
■

Εφαρμογή 5

Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, που μπορεί να εγγραφεί σ' ένα ημικύκλιο ακτίνας r .

Λύση

Αν x, y είναι όπως στο παρακάτω σχήμα (x το μισό της μιάς από της διαστάσεις του ορθογωνίου και y η 2^η των διαστάσεων),



τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με:

$$E(x) = 2xy$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται:

$$E(x) = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(2x\sqrt{r^2 - x^2} \right) = \sqrt{r^2 - x^2} \frac{d}{dx} (2x) + 2x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) = \\ &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dx} = 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow r^2 - x^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = r^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r \end{aligned}$$

Η 2^η των διαστάσεων του είναι ίση με:

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r \right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{2}{4}r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = r\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

Τέλος, οι ζητούμενες διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες με:

$$w = 2x = 2 \frac{\sqrt{2}r}{2} = \sqrt{2}r \quad \& \quad y = \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

■

Παρατήρηση

Επειδή η παραπάνω προς παραγωγή συνάρτηση περιέχονται ριζικά, οπότε είναι δύσκολη η παραγωγή της, θα μπορούσε κανείς να ζητήσει το μέγιστο του τετραγώνου της συνάρτησης (δηλαδή το μέγιστο του τετραγώνου του εμβαδού). Θα μπορούσε δηλαδή να ζητήσει το μέγιστο της συνάρτησης:

$$Z(x) = E^2(x) = 4x^2 y^2 = 4x^2 \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 = 4x^2 (r^2 - x^2) = 4x^2 r^2 - 4x^4.$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (4x^2 r^2 - 4x^4) = 8xr^2 - 16x^3$$

Αλλά:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 8xr^2 - 16x^3 = 0 \Leftrightarrow 8x(r^2 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad r^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

Επιπλέον:

$$\frac{d^2 Z(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} (8xr^2 - 16x^3) = 8r^2 - 48x^2$$

οπότε και:

$$\frac{d^2 Z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)}{dx^2} = 8r^2 - 48\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = 8r^2 - 48\frac{r^2}{2} = -16r^2 < 0$$

δηλαδή το σημείο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ είναι σημείο μεγίστου.

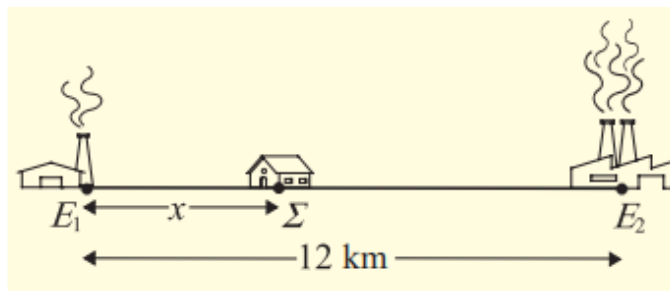
■

Εφαρμογή 6

Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d , να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου)

Λύση

Έστω ότι ο εργολάβος κτίζει το σπίτι σε απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 (οπότε και σε απόσταση $12-x$ από το εργοστάσιο E_2).



Εάν ρ_1 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_1 και ρ_2 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_2 , τότε από την υπόθεση έχουμε:

$$\rho_1 = k \cdot \frac{P}{x^2} \quad \text{και} \quad \rho_2 = k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2} \quad (\text{γιά κάποια σταθερά } k)$$

οπότε, η συνολική μόλυνση (συνολική πυκνότητα καπνού) που δέχεται το σπίτι (από τα δύο εργοστάσια) είναι ίση με:

$$\rho = \rho(x) = \rho_1 + \rho_2 = k \cdot \frac{P}{x^2} + k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2}$$

και της οποίας το ελάχιστο θα πρέπει να υπολογίσουμε. Αλλά:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(k \cdot \frac{P}{x^2} + k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2} \right) = -2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3}$$

Επομένως:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2k \cdot \frac{P}{x^3} = k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} \Leftrightarrow 16x^3 = 2(12-x)^3 \Leftrightarrow$$

$$8x^3 - (12-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 - (12-x)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

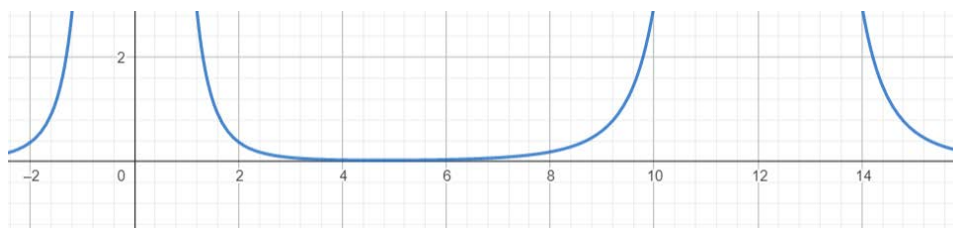
$$(2x - (12-x))((2x)^2 + (2x)(12-x) + (12-x)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - (12-x))(3x^2 + 144) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad (x \in (0, 12))$$

(χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ και το ότι $3x^2 + 144 > 0$).

Επιπλέον:

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} \right) = 6k \cdot \frac{P}{x^4} + k \cdot \frac{48P}{(12-x)^4} > 0 \quad \forall x \in (0, 12)$$

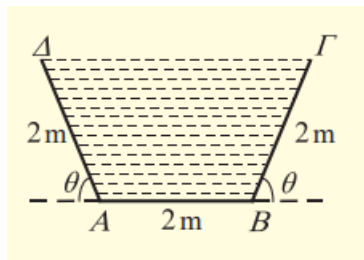


Δηλαδή το σημείο $x = 4$ είναι σημείο ελαχίστου. Επομένως, ο εργολάβος πρέπει να κτίσει το σπίτι σε απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1 .

■

Εφαρμογή 7

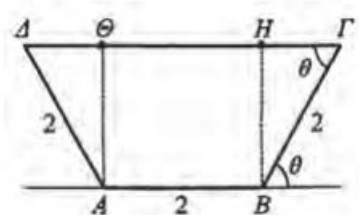
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

Λύση

Η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ, όπως φαίνεται, είναι σχήματος τραπεζίου.



Το εμβαδόν της διατομής είναι ίσο με: $E(\theta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Theta$

Αλλά, από το ορθογώνιο τρίγωνο BHΓ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{HB}{2} = \frac{A\Theta}{2} \Rightarrow HB = A\Theta = 2\eta\mu\theta.$$

Ακόμα,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{\Delta\Theta}{2} \Rightarrow H\Gamma = \Delta\Theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta,$$

Οπότε:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Theta + \Theta H + H\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta$$

Επομένως:

$$E(\theta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Theta = \frac{2 + 2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta}{2} \cdot 2\eta\mu\theta = (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 2\eta\mu\theta = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 4\eta\mu\theta$$

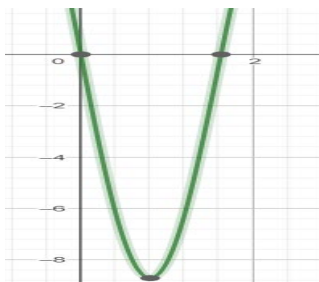
οπότε:

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= (-\eta\mu\theta) \cdot 4\eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 4\sigma\upsilon\nu\theta = -4\eta\mu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε: $x = \sigma\upsilon\nu\theta$ τότε θα πρέπει $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$. Αλλά $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ Όμως}$$

$$E''(\theta) = (4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1))' = -16\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta - \eta\mu\theta < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

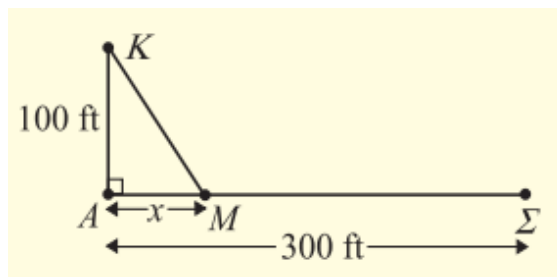


οπότε το σημείο $\theta = \frac{\pi}{3}$ είναι (το ζητούμενο) σημείο ελαχίστου.

■

Εφαρμογή 8

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακριά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.



Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Λύση

Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.

Έχουμε:

$$t_1 = \frac{(KM)}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} \quad \& \quad t_2 = \frac{(M\Sigma)}{v_2} = \frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

και τον οποίο θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε. Αλλά:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{2} \frac{2x}{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5} = 0 \\ 5x &= 3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 100^2) \Leftrightarrow 16x^2 = 9 \cdot 100^2 \\ \Leftrightarrow x &= 75 \end{aligned}$$

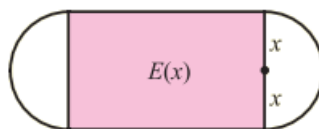
$$T''(x) = \left(\frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5} \right)' = \frac{3\sqrt{x^2+100^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+100^2}}}{\left(3\sqrt{x^2+100^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+100^2) - 3x^2}{\left(3\sqrt{x^2+100^2}\right)^2 \sqrt{x^2+100^2}} = \frac{100^2}{\left(3\sqrt{x^2+100^2}\right)^2 \sqrt{x^2+100^2}} > 0$$

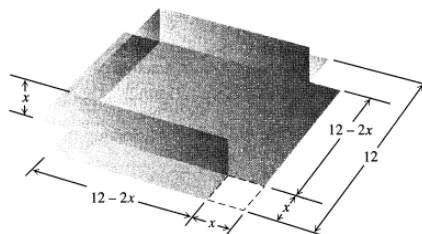
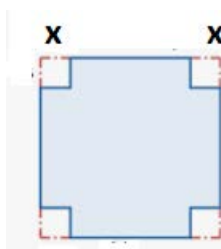
Δηλαδή, η συνάρτηση T παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 75$ ft. Άρα, όταν $x = 75$ ft, τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

Εφαρμογές

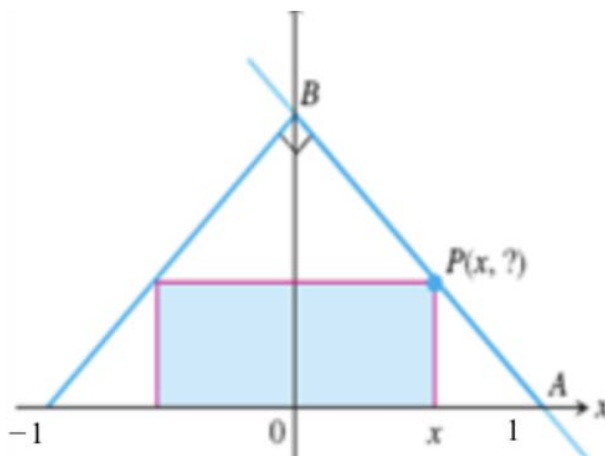
- Είναι γνωστό ότι, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



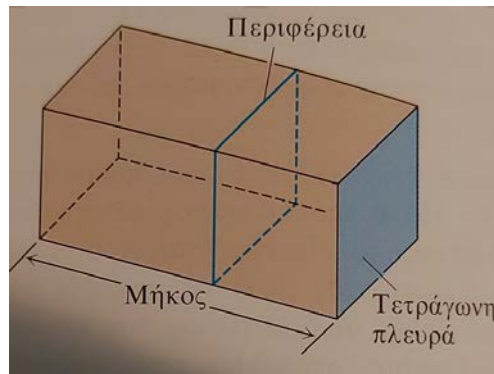
- Ένα κουτί ανοικτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετραγωνικό φύλλο κασσιτερου διαστάσεων 15x15 cm αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει το κουτί τη μέγιστη χωρητικότητα;



- Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο εγγεγραμμένο σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους 2 μονάδων. Ποιό είναι το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου και ποιές οι διαστάσεις του;

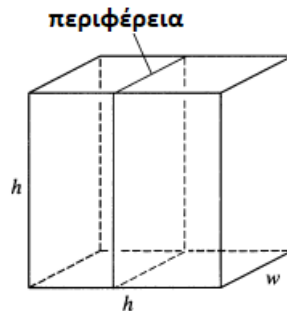


4. (α) Έστω ότι τα ταχυδρομεία δέχονται δέματα εσωτερικού μόνο όταν το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας του δέματος δεν υπερβαίνει τα 108 cm.

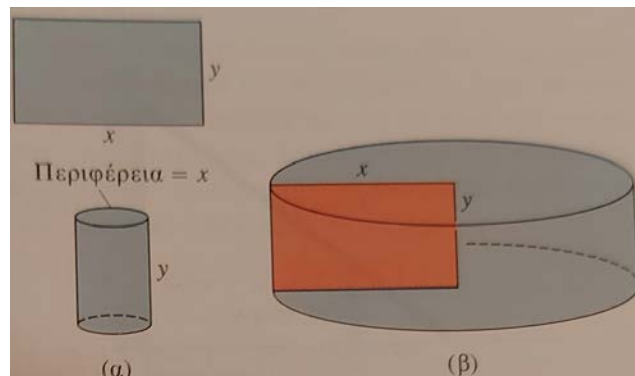


Εάν έχουμε ένα δέμα με δύο τετράγωνες πλευρές, ποιές διαστάσεις πρέπει να έχει για μέγιστη χωρητικότητα;

- (β) Έστω ότι αντί για ένα δέμα με δύο τετραγωνικές πλευρές είχαμε ένα άλλο με τέσσερες τετραγωνικές πλευρές. Ποιές διαστάσεις θα δώσουν τώρα τη μέγιστη χωρητικότητα;

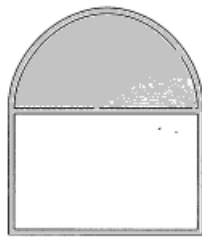


5. (α) Ένα ορθογώνιο φύλλο περιμέτρου 36 cm και διαστάσεων x και y τυλίγεται σε κύλινδρο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (α). Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις x και y για να μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;

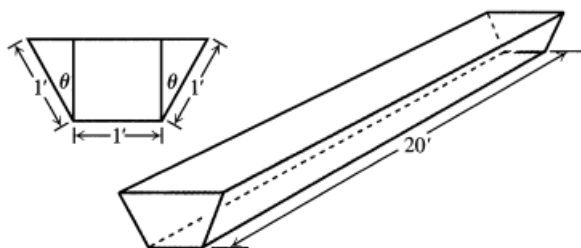


- (β) Το ίδιο φύλλο περιστρέφεται γύρω από τη μία πλευρά του y διαγράφοντας τον κύλινδρο που φαίνεται στο σχήμα (β). Για ποιές τιμές των x, y μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;
6. Ένα παράθυρο έχει σχήμα ορθογωνίου στο οποίο επικάθεται ένα ημικύκλιο. Το ορθογώνιο τμήμα του παραθύρου αποτελείται από καθαρό γυαλί ενώ το γυαλί του ημικύκλιου έχει χρώμα που αφήνει να περάσει μόνο το μισό φως ανά μονάδα επιφάνειας σε σχέση με το καθαρό γυαλί. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου

είναι σταθερή (ας πούμε c). Να βρεθούν οι διαστάσεις του παραθύρου που θα αφήσουν να περάσει το περισσότερο φως. Αγνοείτε το πάχος του πλαισίου.



7. Η σκάφη του σχήματος θα κατασκευαστεί με τις διαστάσεις που σημειώνονται. Μονάχα τη γωνία θ μπορούμε να μεταβάλλουμε. Για ποιά τιμή της θ μεγιστοποιείται ο όγκος της σκάφης;



8. Δείξτε ότι η ακτίνα ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου, με μέγιστη την εξωτερική του επιφάνεια, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σ' έναν κώνο, είναι η μισή της ακτίνας του κώνου.

