

11. Γραφική παράσταση συνάρτησης

Για να κατασκευάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης f , ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της με τους άξονες
2. Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
3. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο f' της f και κατασκευάζουμε πίνακα του προσήμου της. Με τη βοήθειά του προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τα τοπικά ακρότατά της.
4. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f και κατασκευάζουμε πίνακα του προσήμου της. Με τη βοήθειά του καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.
5. Βρίσκουμε αν υπάρχουν (τυχόν) ασύμπτωτες.

Εφαρμογή 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

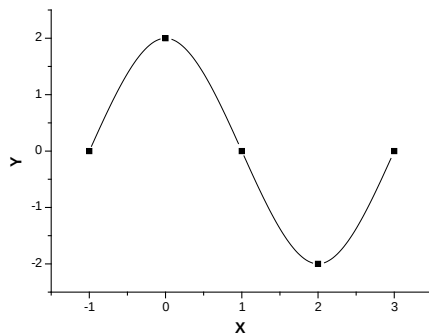
Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
 $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής, τα κοίλα θα τα μελετήσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	+	-	-	+	
f''	-	-	+	+	
f	$\nearrow$	max	$\searrow$ σ.κ.	$\searrow$ min	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in (0, 2)$. Στη θέση $x = 0$ έχει τοπικό μέγιστο και είναι το $f(0) = 2$, ενώ στη θέση $x = 2$ έχει τοπικό ελάχιστο και είναι το $f(2) = -2$. Επίσης είναι κυρτή για $x > 1$, και κοίλη για $x < 1$, ενώ στη θέση $x = 1$ έχει σημείο καμπής. Ακόμα, η f δεν έχει οριζόντιες, πλάγιες ή κατακόρυφες ασυμπτώτες.



■

Εφαρμογή 2

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$. Η 1^{η} παράγωγός της είναι ίση με:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2xx - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Για τη μονοτονία και τα ακρότατα κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'		+	-	-	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$ min	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in (-1, 1)$. Βλέπουμε δηλαδή ότι στο σημείο $x = -1$ η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$, ενώ στο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Επιπλέον:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)' = \frac{2xx^2 - (x^2 - 1)2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα κοίλα και τα (πιθανά) σημεία καμπής της f θα τα μελετήσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		-	+
f		κοίλη	κυρτή

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Το σημείο $x = 0$ δεν είναι σημείο καμπής της f αν και αλλάζει η καμπυλότητα της δεξιά και αριστερά του (στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν ορίζεται).

Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος. Επιπλέον:

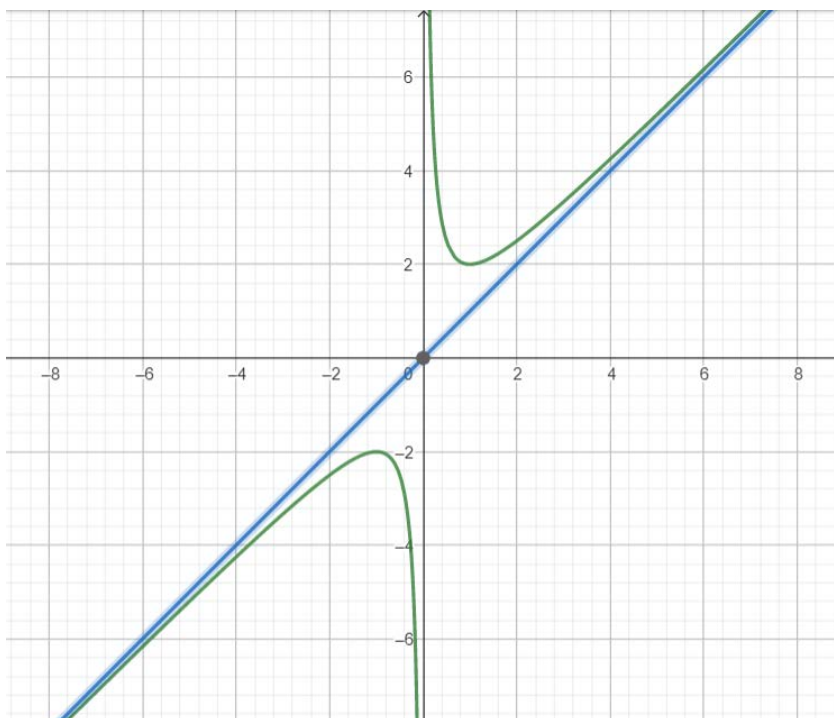
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 = \beta$$

Άρα, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτος του γραφήματος της $f(x) = x + \frac{1}{x}$



Εφαρμογή 3

Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x - \mu)^2}, \quad \mu > 0$$

ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής. Να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση όταν $\mu = 1$.

Λύση

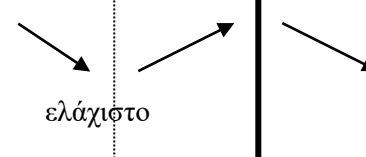
Είναι φανερό ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται στο σημείο $x=\mu$ (άρα είναι ασυνεχής στο εν λόγω σημείο και δεν υπάρχει η παράγωγος της σ' αυτό).

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ είναι ίση με:

$$f'(x) = 2\mu \frac{(2x-\mu)(x-\mu)^2 - (x^2 - \mu x + \mu^2) \cdot 2(x-\mu)}{(x-\mu)^4} = -2\mu^2 \frac{(x+\mu)}{(x-\mu)^3}$$

$$\text{οπότε: } f'(x)=0 \Rightarrow -2\mu^2 \frac{(x+\mu)}{(x-\mu)^3} = 0 \Rightarrow x = -\mu$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x		-μ		μ	
x+μ	-		+		+
(x-μ) ³	-		-		+
-2 μ ²	-		-		-
f'(x)	-		+		-
f(x)					

δηλαδή, το σημείο $x=-\mu$ είναι το μοναδικό ακρότατο σημείο, και μάλιστα όπως φαίνεται από τον πίνακα είναι σημείο ελαχίστου (ολικό).

Γιά τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(-2\mu^2 \frac{x+\mu}{(x-\mu)^3} \right)' = -2\mu^2 \frac{(x-\mu)^3 - (x+\mu) \cdot 3(x-\mu)^2}{(x-\mu)^6} = 4\mu^2 \frac{x+2\mu}{(x-\mu)^4}$$

οπότε:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 4\mu^2 \frac{x+2\mu}{(x-\mu)^4} = 0 \Rightarrow x = -2\mu$$

Με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x		-2μ		μ	
x+2μ	-		+		+
f''(x)	-		+		+
f(x)					
	σημείο καμπής				

δηλαδή, βλέπουμε ότι το σημείο $x=-2\mu$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της $f(x)$ (δεξιά και αριστερά του εν λόγω σημείου έχουμε διαφορετικό είδος καμπυλότητας).

Παρατήρηση

Μερικές ακόμα χρήσιμες πληροφορίες οι οποίες θα βοηθήσουν στην κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ είναι και οι εξής:

(α) $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R} - \{\mu\}$ (η $f(x) = \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2}$ και το τριώνυμο

$$x^2 - \mu x + \mu^2 > 0, \quad \forall x \text{ γιατί η διακρίνουσά του } \Delta = (-\mu)^2 - 4\mu^2 = -3\mu^2 < 0).$$

(β) Το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{L'H} \frac{2\mu(2x-\mu)}{2(x-\mu)} \stackrel{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{L'H} \frac{2\mu \cdot 2}{2} = 2\mu$

δηλαδή η ευθεία $y=2\mu$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$.

(γ) Ακόμα $\lim_{x \rightarrow \mu} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2} = \frac{2\mu \lim_{x \rightarrow \mu} (x^2 - \mu x + \mu^2)}{\lim_{x \rightarrow \mu} (x-\mu)^2} = \frac{2\mu\mu^2}{\lim_{x \rightarrow \mu} (x-\mu)^2} = +\infty$

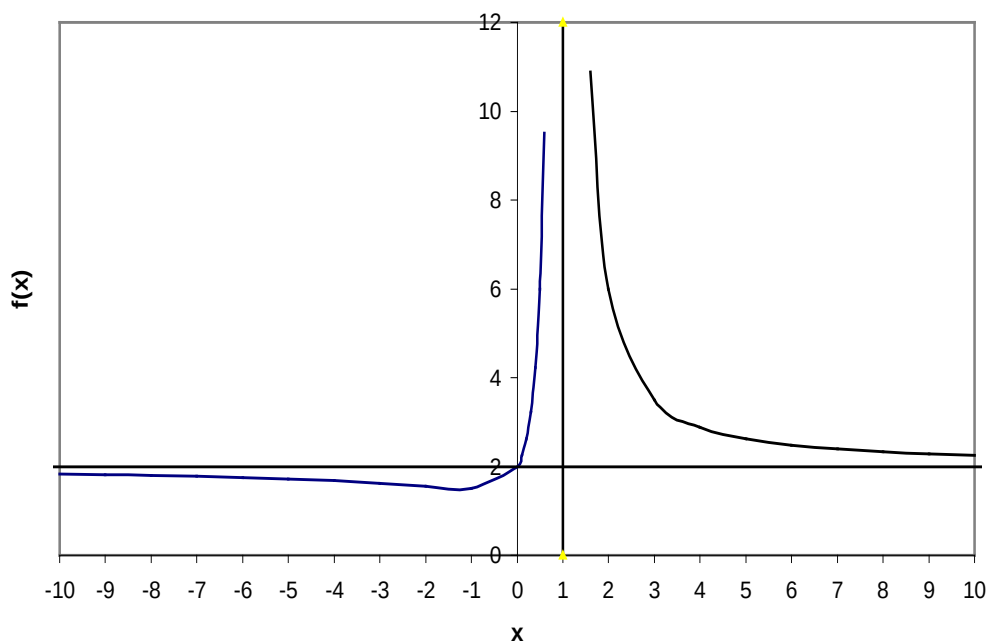
δηλαδή η ευθεία $x=\mu$ είναι *κατακόρυφη ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$.

Αν $\mu=1$

Η $f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$ έχει (σύμφωνα με τα παραπάνω) ελάχιστο στο σημείο $x=-1$ ίσο με

$$f(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{2}, \text{ σημείο καμπής το } x=-2 \text{ και } f(-2) = \frac{14}{9}. \text{ Η ευθεία } y=2 \text{ είναι}$$

οριζόντια ασύμπτωτος της $f(x)$, ενώ η ευθεία $x=1$ είναι *κατακόρυφη ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$. Τέλος $f(0)=2$, οπότε η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι η:



■

Εφαρμογή 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3x-6}{x(x+6)}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq -6$$

Να επισημανθούν τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία τομής του γραφήματος με τους άξονες συντεταγμένων, να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f και οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών στο γράφημα της f . Να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης.

Λύση

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο, αφού αναλύσουμε πρώτα σε απλά κλάσματα:

$$f(x) = \frac{4}{x+6} - \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{4}{(x+6)^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{3(x-6)(x+2)}{x^2(x+6)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(x+6)^3} - \frac{2}{x^3}$$

Παρατηρούμε: $f(2) = 0$ και επομένως το γράφημα της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των x ' x στο σημείο $(2,0)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Ακροτάτων: $f'(-2) = 0$, $f''(-2) = \frac{3}{2^3} > 0$ και $f(-2) = \frac{3}{2}$ και

επομένως το σημείο $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου, και $f'(6) = 0$,

$f''(6) = -\frac{1}{2^3 \cdot 3^3} < 0$ και $f(6) = \frac{1}{6}$ και επομένως το σημείο $\left(6, \frac{1}{6}\right)$ είναι θέση τοπικού μεγίστου.

Ο υπολογισμός της 2ας παραγώγου δεν είναι προφανώς αναγκαίος, για το χαρακτηρισμό των ακροτάτων, αφού η 1^η παράγωγος είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο σε περιοχές γύρω από το -2 και το 6 αντίστοιχα.

Πράγματι: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) < 0$.

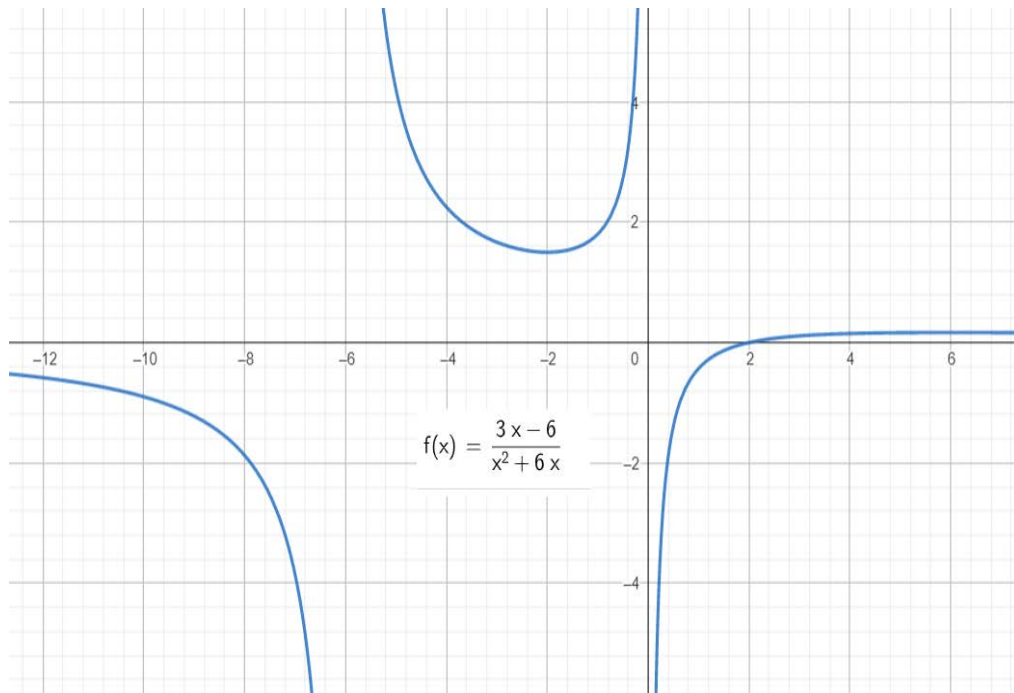
Επίσης η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-2,0) \cup (0,6)$ και φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -6) \cup (-6, -2) \cup (6, +\infty)$.

Παρατηρούμε:

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

Επομένως οι ευθείες $x = -6$ και $x = 0$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες** και η ευθεία $y = 0$ **οριζόντια ασύμπτωτος** στο γράφημα της συνάρτησης f .

Η μορφή του γραφήματος προκύπτει από τις ασύμπτωτες, τα ακρότατα, το πρόσημο της f και της f'



Από το γράφημα προκύπτει πως το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι $\left(y \leq \frac{1}{6}\right) \cup \left(y \geq \frac{3}{2}\right)$.

Εφαρμογή

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

