

10. Συνέχεια συνάρτησης

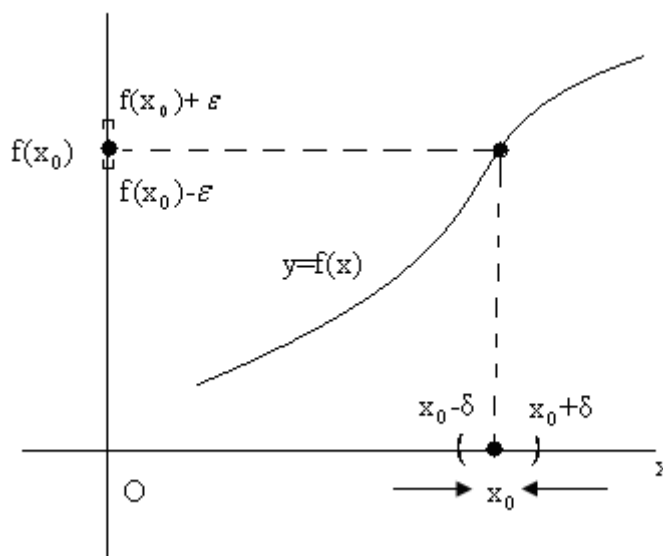
Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνεχής στο σημείο** x_0 αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή θα πρέπει: (α) η συνάρτηση $f(x)$ να ορίζεται στο σημείο x_0 , άρα θα υπάρχει η τιμή $f(x_0)$ (έχει νόημα λοιπόν να μιλάμε για συνέχεια μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης).

(β) να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(γ) τα (α) και (β) θα πρέπει να είναι ίσα (δείτε το σχήμα 8)



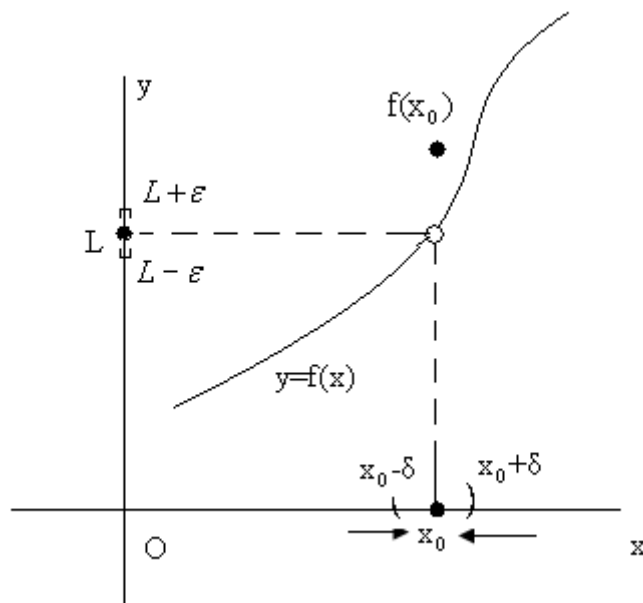
Σχήμα 8

Μια συνάρτηση καλείται **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 .

Παρατήρηση

(1) Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , εάν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- (α) υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αλλά είναι διάφορο από την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$). Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια πρώτου είδους** (ή αιρούμενη ασυνέχεια γιατί ορίζοντας την τιμή της συνάρτησης f κατάλληλα στο σημείο x_0 , η συνάρτηση γίνεται συνεχής). (δείτε το σχήμα 9).



Σχήμα 9

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=2$, η συνάρτηση:

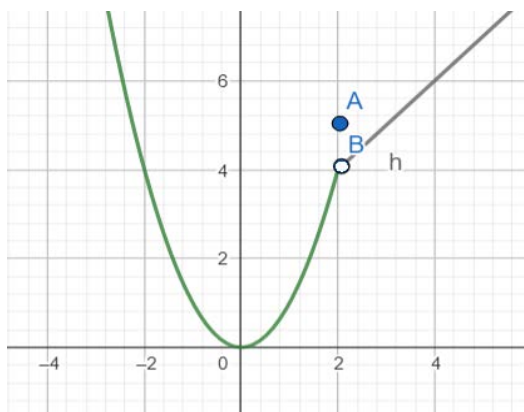
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 2+2 = 4 \end{aligned} \right\} \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq 5 = f(2)$$

Δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

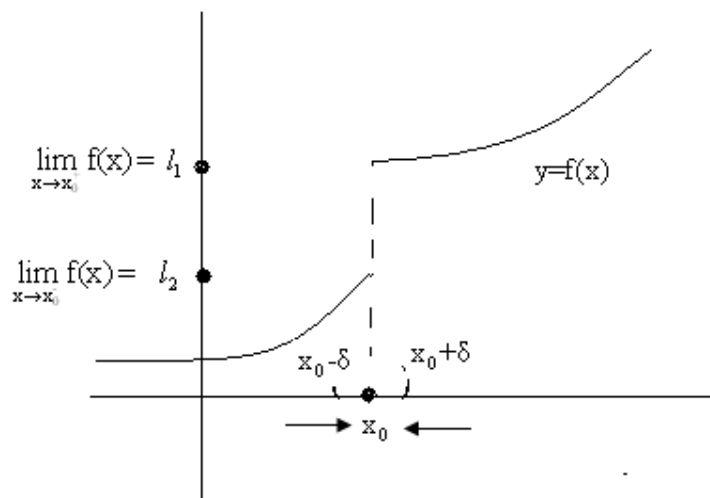


Παρατήρηση

Εάν θέσουμε $f(2)=4$ τότε η συνάρτηση f γίνεται συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

■

- (β) δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια δεύτερου είδους** (δείτε το σχήμα 10).



Σχήμα 10

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μπορεί να συμβεί μιά από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

- (I) Υπάρχουν τα πλευρικά όρια, είναι πεπερασμένα, αλλά διαφέρουν (λέμε ότι έχουμε **άλμα ασυνέχειας**).
- (II) Ένα (τουλάχιστον) από τα πλευρικά όρια απειρίζεται.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=1$, η συνάρτηση:

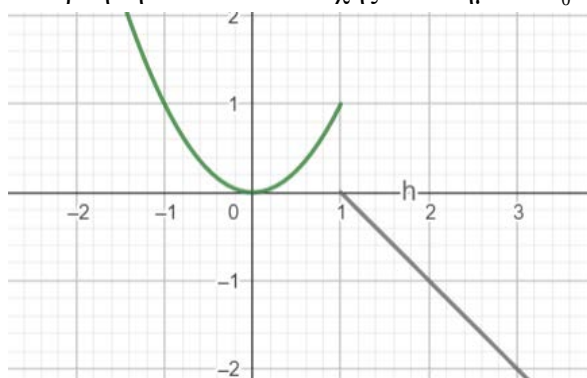
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ -x+1 & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = -1+1 = 0 \end{aligned} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Δηλαδή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.



Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=1$, η συνάρτηση:

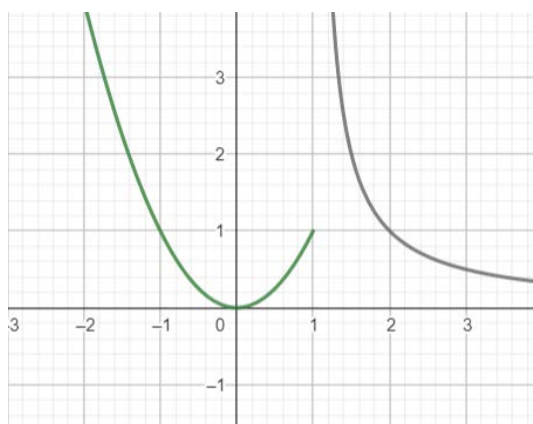
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Δηλαδή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.



■

- (2) Εάν υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **αριστερά συνεχής στο σημείο x_0** . Ανάλογα, εάν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **δεξιά συνεχής στο σημείο x_0** .
- (3) Εάν η συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, λέμε ότι είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ εάν: (i) είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$, (ii) είναι δεξιά συνεχής στο σημείο a και (iii) αριστερά συνεχής στο σημείο β .
- (4) Υπάρχει ένας αυστηρός ε, δ , ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης. Λέμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνεχής στο σημείο x_0** αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε:

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι συνεχής σ' ένα (οποιοδήποτε) σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε} \quad |f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| < \varepsilon$$

Εάν θεωρήσουμε $\delta=\varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής σ' ένα (οποιοδήποτε) σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε} \quad |\eta\mu x - \eta\mu(x_0)| < \varepsilon$$

Αλλά

$$\begin{aligned} |\eta\mu x - \eta\mu x_0| &= \left| 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| 2\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| 2\frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0| \end{aligned}$$

Εάν θεωρήσουμε $\delta=\varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Ο ορισμός αυτός είναι δύσχρηστος και σπάνια χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συνέχειας μιάς συνάρτησης σε ένα σημείο της. Αντί γι' αυτόν χρησιμοποιείται η επόμενη πρόταση και η συνέχεια μερικών βασικών (γνωστών) συναρτήσεων.

Πρόταση

(1) Εάν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο x_0 , τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις:

(α) $f \pm g$

(β) $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ((α) & (β) γραμμικότητα της συνέχειας)

(γ) $f \cdot g$

(δ) $\frac{f}{g}$ όταν $g(x_0) \neq 0$

(ε) $\sqrt{f(x)}$ όταν $f(x) \geq 0$

(2) Εάν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

(3) Η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(α) Επομένως, μιά πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, a_n \neq 0 \text{ είναι συνεχής σε κάθε σημείο } x_0 \in \mathbb{R}.$$

(β) Μιά ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x , είναι συνεχής (σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων) σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (δηλαδή σε κάθε σημείο x_0 που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή της).

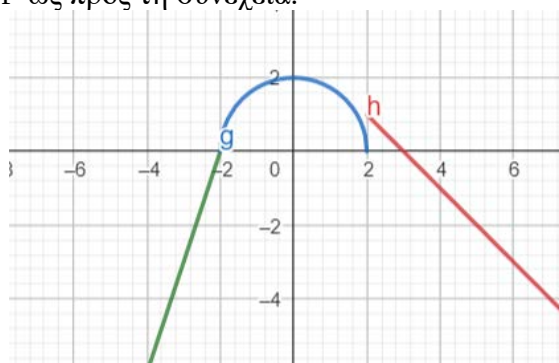
(4) Οι συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+6, & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 < x \end{cases}$$

Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.



Λύση

Εάν $x < -2$, τότε η $f(x) = 3x+6$ άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x < -2$ σαν πολυωνυμική. Ανάλογα εάν $2 < x$, η $f(x) = 3-x$ οπότε και πάλι είναι συνεχής για $2 < x$.

Τέλος, εάν $-2 < x < 2$, η $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ η οποία είναι και πάλι συνεχής σε κάθε σημείο

του διαστήματος $(-2, 2)$ (από το 1(ε) της παραπάνω πρότασης). Άρα, τα πιθανά σημεία ασυνέχειας τα οποία θα πρέπει να εξετάσουμε είναι τα σημεία $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Συνέχεια στο $x_1 = -2$. Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x+6) = -6+6=0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2} = 0 = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(2)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_1 = -2$

Συνέχεια στο $x_2 = 2$. Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2} = 0 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 3-2=1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = -2$ ($\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$), ασυνέχεια δεύτερου είδους). Η f είναι αριστερά συνεχής στο $x_1 = -2$. ■

Εφαρμογή 2

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών, α, β ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x + 1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \eta\mu x + \beta - 2, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f για $x < -\frac{\pi}{2}$ είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι συνεχής, ομοίως, και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ όπως και για $x > \frac{\pi}{2}$. Άρα, για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι και συνεχής και στα σημεία $\pi/2$ και $-\pi/2$.

Για να είναι συνεχής στο $\pi/2$ και στο $-\pi/2$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{άρα}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-2\eta\mu x + 1) = -2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (\alpha\eta\mu x + \beta - 2) = \alpha\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \beta - 2 = -\alpha + \beta - 2 \end{aligned} \right\}$$

αρα

$$-\alpha + \beta - 2 = 3 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \quad (\text{A})$$

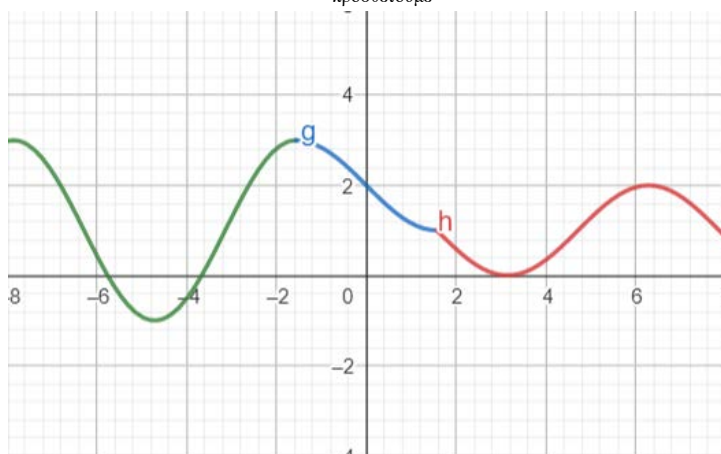
και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\alpha\eta\mu x + \beta - 2) = \alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta - 2 = \alpha + \beta - 2 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sigma\upsilon\nu x + 1) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + 1 = 1 \end{aligned} \right\}$$

αρα

$$\alpha + \beta - 2 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 3 \quad (\text{B})$$

Από Α και Β έχουμε το σύστημα $\left. \begin{aligned} -\alpha + \beta &= 5 \\ \alpha + \beta &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\beta = 8 \Rightarrow \beta = 4 \quad \text{αρα } \alpha = -1$
προσθετούμε



■

Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Μιά συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

Θεώρημα 1 (φραγμένο)

Εάν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση, τότε είναι φραγμένη δηλαδή $\exists m, M$ τέτοια ώστε $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $m \leq f(x) \leq M$.

Παρατήρηση

Η πρόταση δεν ισχύει αν το διάστημα δεν είναι κλειστό.

Παράδειγμα

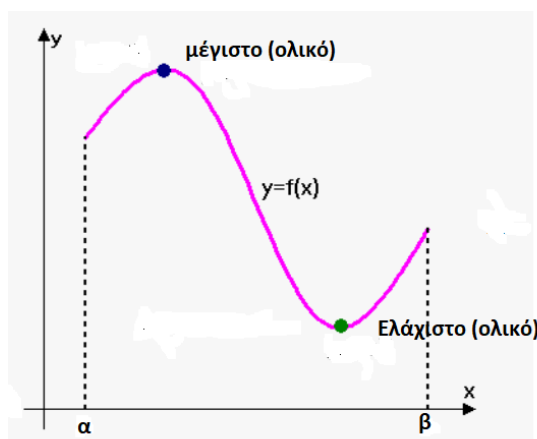
$$\text{Εάν } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ και } f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R},$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι φραγμένη ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$).

■

Θεώρημα 1 (μέγιστο/ελάχιστο)

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση, τότε λαμβάνει το μέγιστο και το ελάχιστο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δηλαδή υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$ (δείτε σχήμα 11).



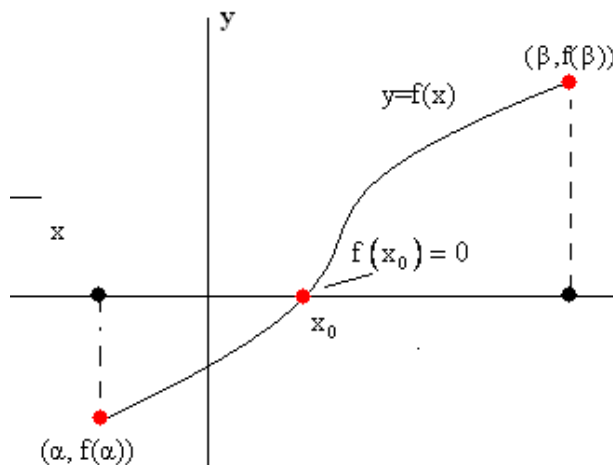
Σχήμα 11

Πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις **ρίζες** μιας εξίσωσης. Σε αρκετές περιπτώσεις είναι αρκετό να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης της (σε κάποιο διάστημα) και κατόπιν με προσεγγιστικές μεθόδους (της Αριθμητικής Ανάλυσης) να προσπαθήσουμε την υπολογίσουμε.

Στην προσπάθεια της απόδειξης ύπαρξης μιας ρίζας, σημαντικό ρόλο παίζει (πολλές φορές) το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα (Bolzano)

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ (δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β)) (δείτε το σχήμα 12).



Σχήμα 12

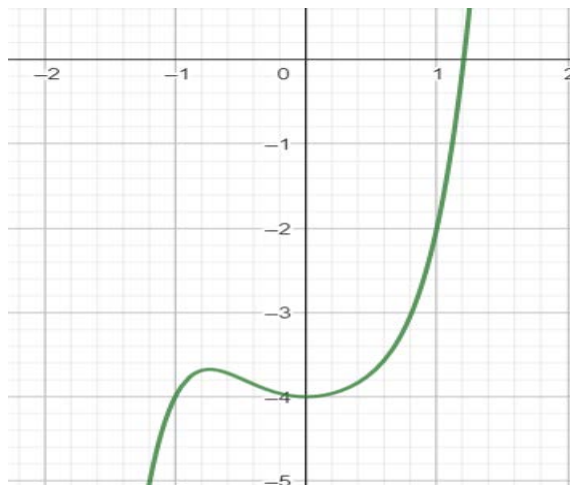
Εφαρμογή 3

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + x^2 - 4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^2 - 4$, η οποία σαν πολυωνυμική είναι συνεχής στο διάστημα $(1,2)$. Ακόμα:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^5 + 1^2 - 4 = -2 \\ f(2) = 2^5 + 2^2 - 4 = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$



Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = x^5 + x^2 - 4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ (το ποιά είναι ακριβώς η ρίζα είναι ίσως δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά).

■

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά, για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό της ρίζας.

Π.χ. $f(1,5) = 1,5^5 + 1,5^2 - 4 \approx 5,84 \Rightarrow f(1) \cdot f(1,5) < 0$. Οπότε η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1,5)$ κ.ο.κ.

Εφαρμογή 4

Ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

Έστω $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0$ ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0$.

Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = -\infty$$

(γιατί το n είναι περιττός αριθμός). Από αυτό έπεται ότι $\exists \alpha < 0, f(\alpha) < 0$.

Ανάλογα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty.$$

Από αυτό έπεται ότι $\exists \beta > 0, f(\beta) > 0$, δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (α, β) (για κάποια α και β), δηλαδή το πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

■

Παρατήρηση

Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, του πολυωνύμου, δεν είναι 1 τότε τα αποτελέσματα είναι ανάλογα (το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n)$ και διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το α_n).

Εφαρμογή 5

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x-3} + \frac{x^6+1}{x-4} = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(3,4)$.

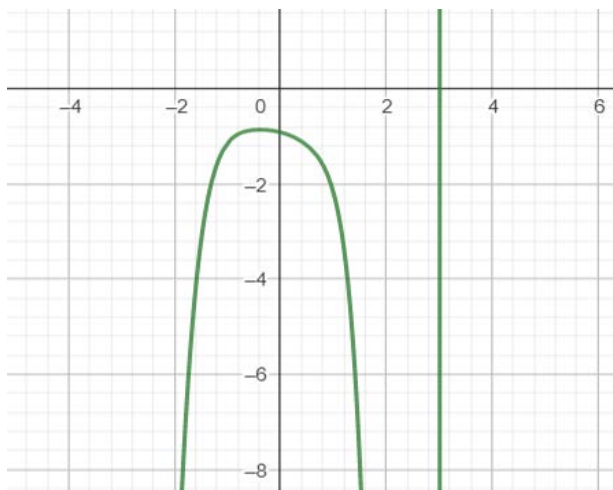
Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\frac{(x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 0$. Θεωρώ τη συνάρτηση: $f(x) = (x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[3,4]$. Ακόμα,

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= (3^2+2)(3-4) + (3^6+1)(3-3) = -11 < 0 \\ f(4) &= (4^2+2)(4-4) + (4^6+1)(4-3) = 4^6+1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) \cdot f(4) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3,4)$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $\frac{(x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 0$,

πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x-3} + \frac{x^6+1}{x-4} = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (3,4).



■

Εφαρμογή 6 (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)

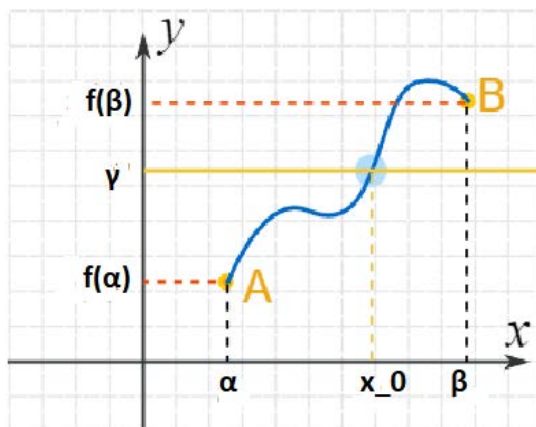
Εάν $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ (δείτε το σχήμα 13).

Απόδειξη

Έστω ότι $f(a) < f(\beta)$ και έστω μια τιμή γ τέτοια ώστε $f(a) < \gamma < f(\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \gamma$. Τότε:

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \quad \& \quad g(\beta) = f(\beta) - \gamma > 0$$

δηλαδή $g(a) \cdot g(\beta) < 0$. Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $g(x) = f(x) - \gamma = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (a, β) , δηλαδή υπάρχει ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τ.ω. $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \gamma$, δηλαδή η συνάρτηση f παίρνει, στο σημείο x_0 , την τιμή γ .



Σχήμα 13

■

Παρατήρηση

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι ένας επιπλέον τρόπος για την απόδειξη ύπαρξης μιάς (πραγματικής) ρίζας μιάς εξίσωσης.

Εφαρμογή 7

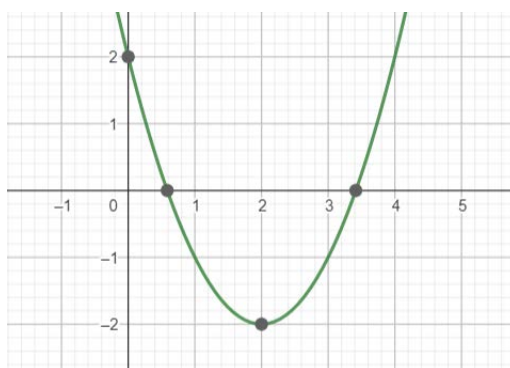
Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+2$ τέμνει τον άξονα xOx' σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[0,2]$ (δηλαδή, η εξίσωση $x^2-4x+2=0$ έχει μιά τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$).

Λύση

Η συνάρτηση: $f(x)=x^2-4x+2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$. Ακόμα,

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) = -4 < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές $f(0)=2$ και $f(2)=-2$, δηλαδή όλες τις τιμές ανάμεσα στο -2 και 2 . Επομένως θα παίρνει και την τιμή 0 , δηλαδή θα υπάρχει $x_0 \in (0,2)$, τ.ω $f(x_0)=x_0^2-4x_0+2=0$ (ή ισοδύναμα η εξίσωση $x^2-4x+2=0$ έχει μιά τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$).



■