

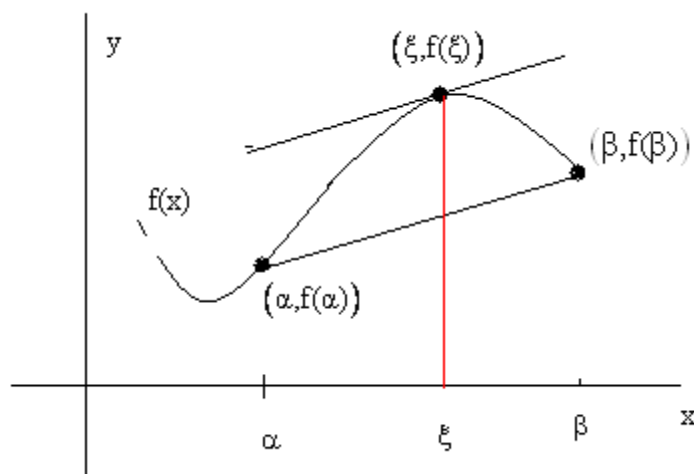
9. Θεώρημα Μέσης Τιμής, Θεώρημα Rolle και εφαρμογές τους

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- (β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)

Τότε υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Εάν θεωρήσουμε τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ τότε, το Θεώρημα Μέσης Τιμής μας αναφέρει ότι, υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία που περνά από τα σημεία A, B (η ευθεία που περνά από τα A, B έχει ως γνωστόν κλίση ίση με $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$).

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που το $f(a) = f(b)$, έχουμε την (ειδική) περίπτωση του λεγόμενου Θεωρήματος Rolle.

Θεώρημα Rolle

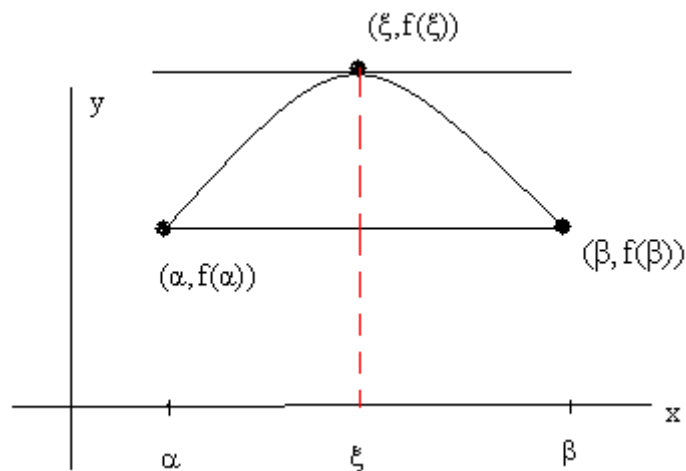
Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- (β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)
- (γ) $f(a) = f(b)$

Τότε υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle

Εάν θεωρήσουμε τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ τότε, το Θεώρημα Rolle μας αναφέρει ότι, υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα των x .

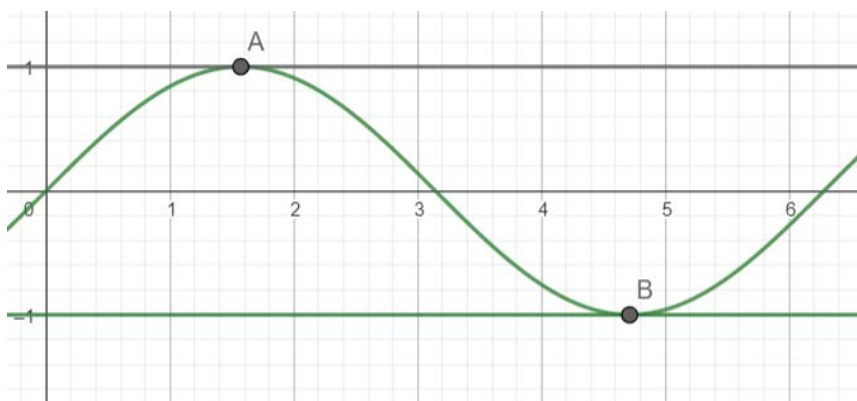


Παρατήρηση

Το Θεώρημα Rolle μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία που να ικανοποιούν την $f'(\xi)=0$.

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$, τότε $f(0)=\eta\mu 0=\eta\mu(\pi)=f(\pi)$, ενώ $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ & $x=\frac{3\pi}{2}$ (δύο σημεία ικανοποιούν την $f'(\xi)=0$).



■

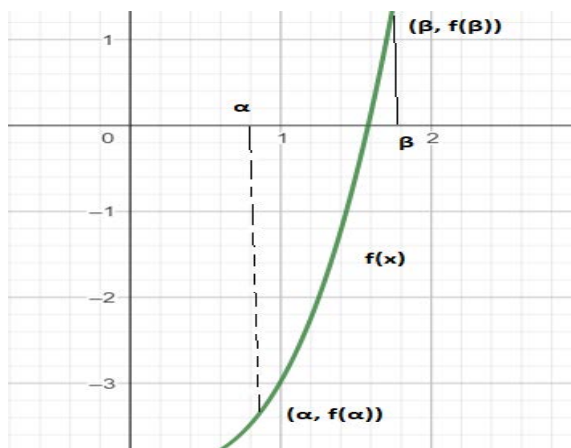
Για την ύπαρξη ενός μοναδικού τέτοιου σημείου ή γενικότερα για την ύπαρξη μιας (μοναδικής) ρίζας μιάς εξίσωσης, χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Bolzano

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρει ότι, εάν οι ποσότητες $f(\alpha), f(\beta)$ είναι ετερόσημες, τότε το διάστημα (α, β) περιέχει μιά τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ (υποθέστε ότι τα σημεία α, β δεν είναι ρίζες της εξίσωσης).



Εφαρμογές

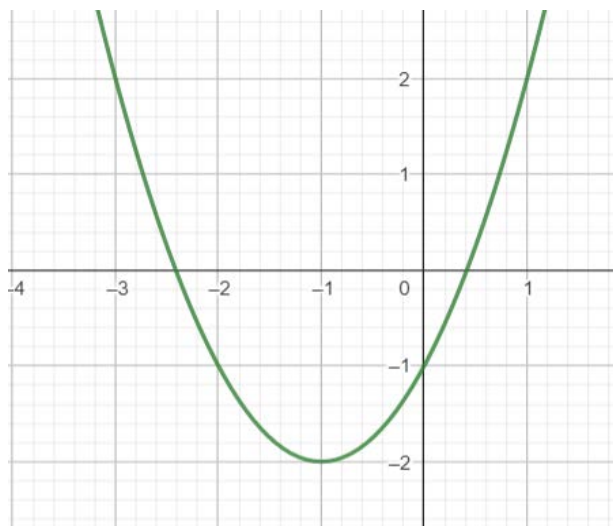
Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το ξ του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 1$ για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει κάποιο $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$



Αλλά $f(1)=2$, $f(0)=-1$ και $f'(\xi)=2\xi+2$ άρα

$$2\xi+2=\frac{2-(-1)}{1-0} \Rightarrow 2\xi+2=3 \Rightarrow 2\xi=1 \Rightarrow \xi=\frac{1}{2}$$

■

Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει 3 ρίζες, έστω τις x_1, x_2, x_3 δηλαδή $x_1^{10}+ax_1+\beta=0$ (και όμοια για x_2, x_3). Εάν ορίσουμε την συνάρτηση $f(x)=x^{10}+ax+\beta$ τότε $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ δηλαδή η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$ (1).

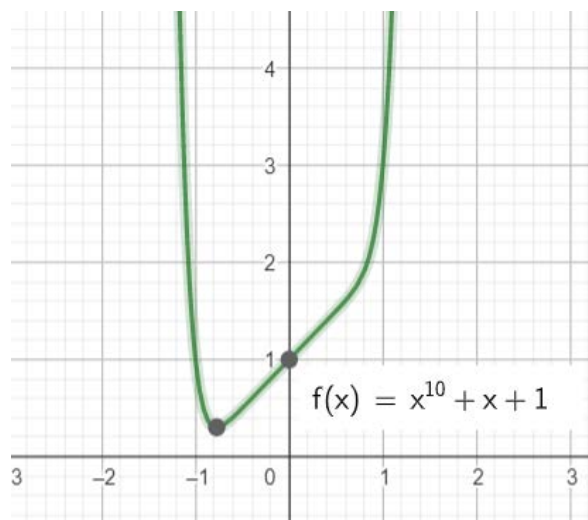
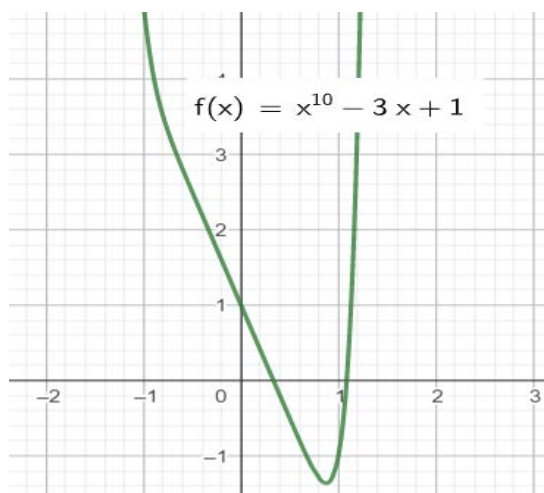
Όμοια η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_2, x_3] \Rightarrow \exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η $f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες που είναι άτοπο γιατί:

$$f'(x)=10x^9+a \text{ και } f'(x)=0=10x^9+a \Rightarrow 10x^9=-a \Rightarrow x=\sqrt[9]{-\frac{a}{10}} \text{ (μοναδική ρίζα)}$$

Άρα η $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

Παράδειγμα



■

Εφαρμογή 3

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+\beta=0$ δεν έχει περισσότερες από μία ρίζες στο διάστημα $[-1, 1]$, ανεξάρτητα από την τιμή του β .

Λύση

Ας υποθέσουμε και πάλι ότι η $x^3 - 3x + \beta = 0$ έχει 2 ρίζες στο διάστημα $[-1, 1]$, έστω τις x_1, x_2 και έστω ότι $x_1 < x_2$. Εάν ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \beta$ τότε $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ οπότε η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x_2) \subset [-1, 1]$ (άρα $\xi \neq \pm 1$) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο γιατί

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

και επειδή $\xi \neq \pm 1$ δεν υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

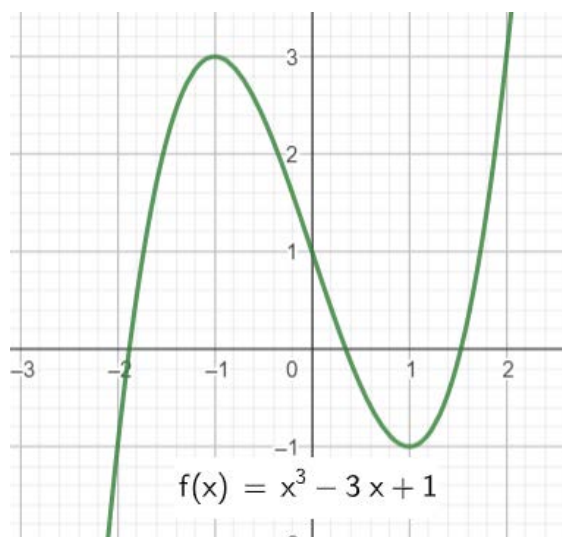
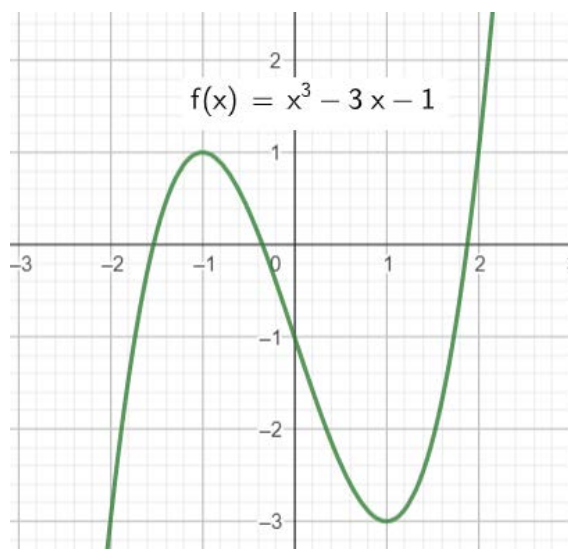
Άρα η $x^3 - 3x + \beta = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Παρατήρηση

Τα σημεία $x = 1$ & $x = -1$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ρίζες γιατί αν:

$$\left. \begin{aligned} (-1)^3 - 3(-1) + \beta &= 0 \Rightarrow -1 + 3 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2 \\ 1^3 - 3 \cdot 1 + \beta &= 0 \Rightarrow 1 - 3 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2 \end{aligned} \right\} \text{δεν ισχύουν ταυτόχρονα.}$$

Παράδειγμα



■

Εφαρμογή 4

(α) Ας θεωρήσουμε μία συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Να αποδειχθεί ότι αν η f' έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες τότε η f έχει το πολύ $n+1$.

(β) Είναι δυνατόν η εξίσωση $x^3 + 3x^2 - \lambda e^x = 0$, να έχει 5 ρίζες, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$;

Λύση

(α) Έστω ότι η f έχει (τουλάχιστον) $n+2$ διαφορετικές ρίζες, τις:

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{n+2}.$$

Τότε σε κάθε ένα από τα $(n+1)$ διαδοχικά διαστήματα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ έχουμε: η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$,

παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (ρ_i, ρ_{i+1}) και $f(\rho_i)=f(\rho_{i+1})=0$. Άρα από το Θ. Rolle $\exists \xi_i \in (\rho_i, \rho_{i+1}), f'(\xi_i)=0$ Δηλαδή, η παράγωγος f' έχει (τουλάχιστον) $(n+1)$ διαφορετικές ρίζες:

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+1}$$

πράγμα άτοπο.

(β) Όχι, δεν είναι δυνατόν. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

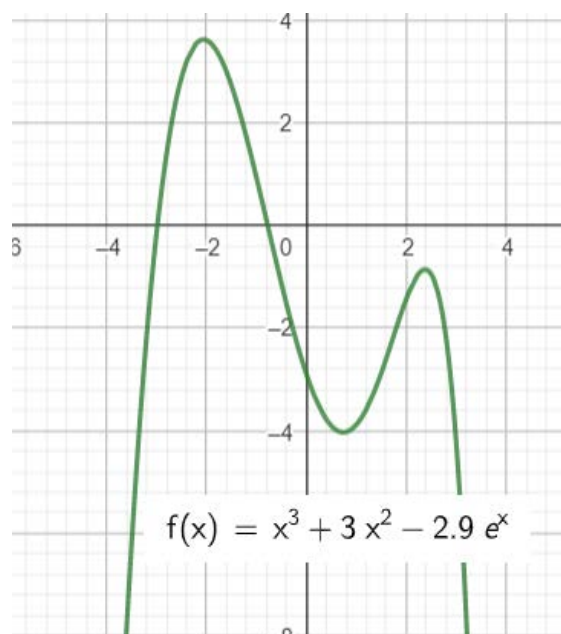
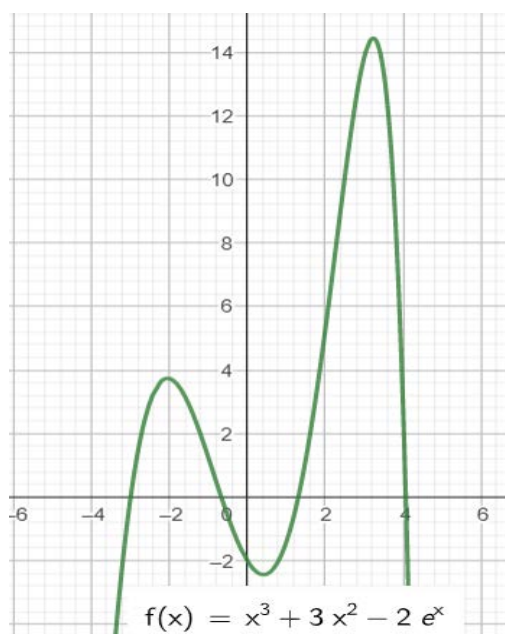
$$f(x) = x^3 e^{-x} + 3x^2 e^{-x} - \lambda$$

τότε η παράγωγος της είναι ίση:

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6x e^{-x} = -\frac{x}{e^x} (x^2 - 6).$$

Η f' έχει ακριβώς τρεις ρίζες, τις $x=0, \pm\sqrt{6}$ οπότε η f έχει το **πολύ** τέσσερις ρίζες, σύμφωνα με το (α).

Παράδειγμα



■

Εφαρμογή 5 (μοναδική ρίζα)

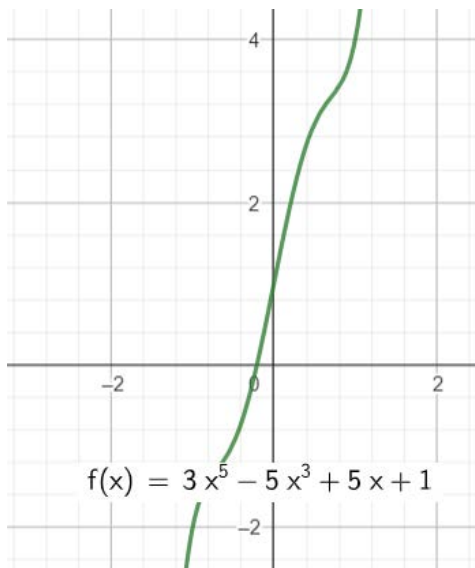
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ σαν πολυωνυμική. Ας υποθέσουμε ότι η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει 2 ρίζες στο διάστημα $[-1, 0]$, έστω τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Επομένως, η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \subset (-1, 0) \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο γιατί:

$$f'(\xi) = 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0$$

και η εξίσωση $15x^4 - 15x^2 + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες (π.χ. εάν θέσουμε $w = x^2$ τότε $15x^4 - 15x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 15w^2 - 15w + 5 = 0$ και η διακρίνουσα $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 5 = 225 - 300 = -75 < 0$). Άρα η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ (*).



Επιπλέον, $f(0) = 1$, $f(-1) = -3 + 5 - 5 + 1 = -2$ δηλαδή $f(0) \cdot f(-1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (**).

Τέλος, από τις σχέσεις (*) και (**) έπεται ότι, η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

■

Εφαρμογή 6

Αποδείξτε ότι: (α) $\frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, (β) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{8} - 2 < 1$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ στο $[1, 3/2]$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[1, 3/2]$ ως λογαριθμική. Είναι $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3/2)$. Άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. και θα υπάρξει $\xi \in (1, 3/2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{3}{2} - \ln 1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow 1 < \xi < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{\xi} > \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{\ln \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[4, 8]$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[4, 8]$. Είναι $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(4, 8)$. Άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. και θα υπάρχει $\xi \in (4, 8)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{8} - 2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{8} - 2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in (4, 8) \Rightarrow 4 < \xi < 8 \Rightarrow 2 < \sqrt{\xi} < \sqrt{8} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{\xi}} > \frac{1}{\sqrt{8}} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{\sqrt{8} - 2}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2}} < \sqrt{8} - 2 < \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{8} - 2 < 1.$$

■

Εφαρμογή 7

Αποδείξτε ότι $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Λύση

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $x < y$. Η $f(t) = \eta\mu t$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x, y]$ (η $\eta\mu t$ συνεχής και παραγωγίσιμη παντού). Άρα από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει $\exists \xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\eta\mu y - \eta\mu x}{y - x} = \left| \frac{\eta\mu y - \eta\mu x}{y - x} \right| = |f'(\xi)|$$

Αλλά $f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu \xi \Rightarrow |f'(\xi)| = |\sigma\upsilon\nu \xi| \leq 1$ άρα

$$\frac{|\eta\mu y - \eta\mu x|}{|y - x|} \leq 1 \Rightarrow |\eta\mu y - \eta\mu x| \leq |y - x|$$

■