

8. Θεώρημα L' Hopital

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$

1. Μορφή $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\alpha = \pm\infty$ και $\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\alpha = \pm\infty$ και $\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρατήρηση

Άλλες απροσδιόριστες μορφές, με κατάλληλους μετασχηματισμούς, μπορούν να καταλήξουν στις μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ο παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τέτοιες μορφές και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.

Απροσδιόριστη Μορφή	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	1^∞	∞^0
Συναρτήσεις	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) - g(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$
Μετατροπή	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ Μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}$ $\frac{1}{fg}$	$e^{\ln f(x) g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ $g(x) \cdot \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$		

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν τα όρια

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu - 1}{x^\mu - 1} \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}^* \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x}$$

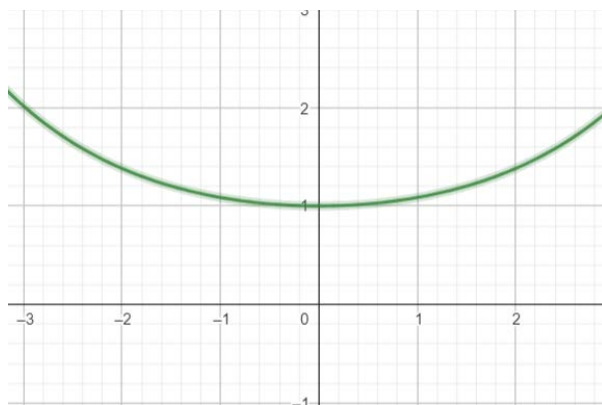
Λύση

(α) Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu - 1}{x^\mu - 1}$ $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu - 1}{x^\mu - 1} \underset{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^\nu - 1)'}{(x^\mu - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\nu x^{\nu-1}}{\mu x^{\mu-1}} = \frac{\nu}{\mu}$$

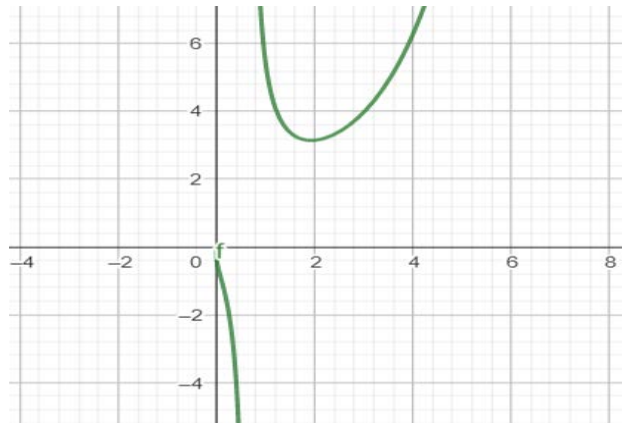
(β) Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} &\underset{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \underset{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$



(γ) Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x} &\underset{\substack{\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^x)'}{(x^2 + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2x + \frac{1}{x}} \underset{\substack{\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^x)'}{\left(2x + \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty \end{aligned}$$



■

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν τα όρια

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

Λύση

(α) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x}$ είναι της απροσδιόριστης μορφής ∞^0 .

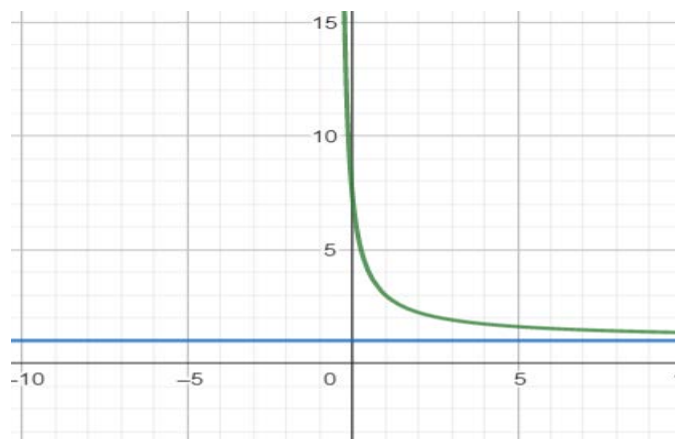
Είναι γνωστό ότι $x = e^{\ln x}$ και $\ln x^a = a \ln x$ άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(1+2x)^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}}$$

Επειδή:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \quad \begin{array}{l} \text{μορφή } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital} \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+2x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^0 = 1$



(β) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ είναι της απροσδιόριστης μορφής $\infty - \infty$

Αφαιρούμε τα κλάσματα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - e^x + 1)'}{(xe^x - x)'} \stackrel{\text{χρήση L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(2+x)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3

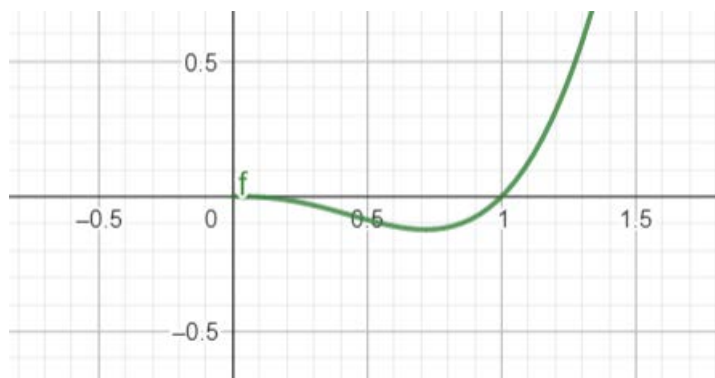
Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$, (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x)$, (γ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{x-1}$

Λύση

(α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, έχουμε απροσδιόριστη μορφή (α.μ.) $0 \cdot (-\infty)$. Το όριο μπορεί να γραφεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} \stackrel{\text{χρήση L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^3}{3} \right) = 0$$



(β) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$ (γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$). Το

1^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \right)$$

$$\text{Αλλά: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

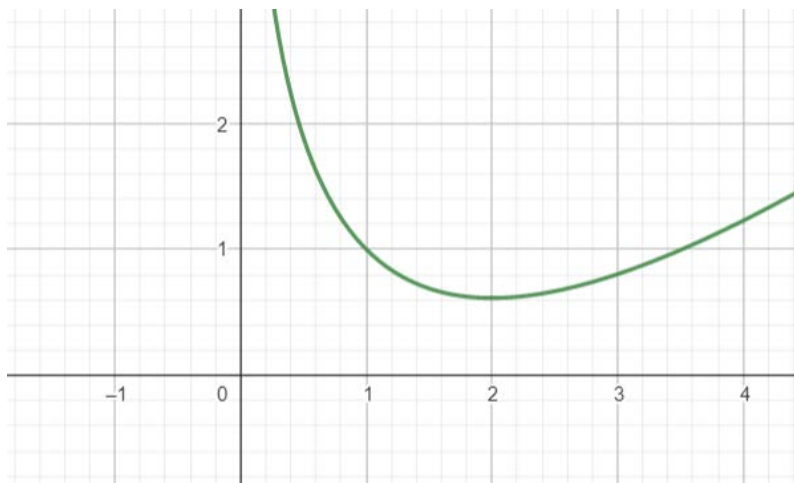
$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = +\infty$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Βγάζοντας κοινό παράγοντα το } x: \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) \right\}. \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{Τελικά: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$



(γ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή 0^0 . Το όριο:

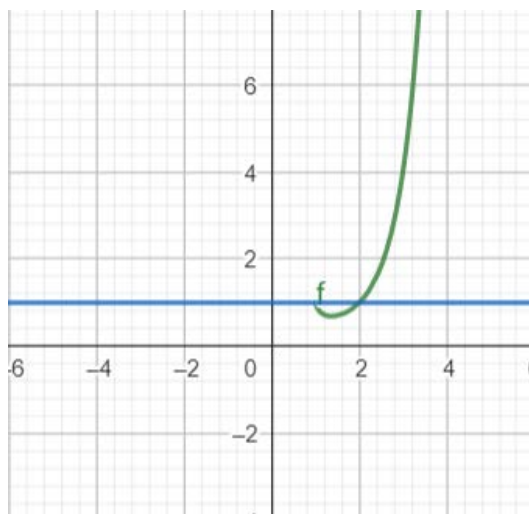
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\ln(x-1)^{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1}}$$

Αλλά:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{(x-1) \ln(x-1)\} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 \ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{x-1} \right)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{x-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{-(x-1)\} = 0$$

οπότε: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1}} = e^0 = 1.$



■

Ασύμπτωτες

Ορισμός

(α) Μία ευθεία $x=x_0$ καλείται **κατακόρυφος ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

δηλαδή καθώς πλησιάζουμε το x_0 από δεξιά ή αριστερά το όριο της $y=f(x)$ είναι $\pm\infty$.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή (κλάσμα) οι κατακόρυφες ασύμπτωτοι συμβαίνουν στα σημεία που μηδενίζουν τον παρανομαστή $Q(x)$.

(β) Η ευθεία $y=y_0$ καλείται **οριζόντια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

(γ) Η ευθεία $y=ax+\beta$, $a \neq 0$ καλείται **πλάγια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+\beta)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+\beta)) = 0$$

Παρατήρηση

(i) Η ευθεία $y=ax+\beta$, $a \neq 0$ είναι **πλάγια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

- (ii) Το γράφημα της $y=f(x)$ έχει πλάγια ασύμπτωτο, εάν $f(x)$ η είναι πολυωνυμική και ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος κατά ένα από τον βαθμό του παρονομαστή

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν οι οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f_1(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

$$(\beta) f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}$$

Λύση

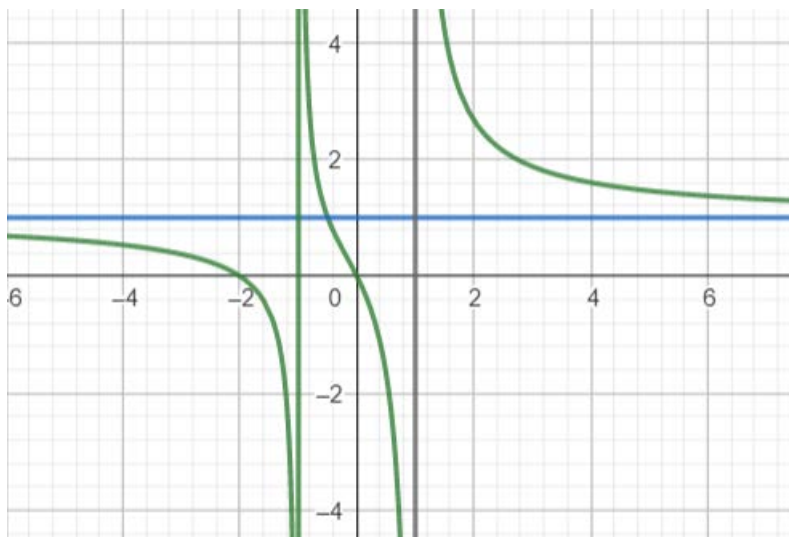
$$\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$$

άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος. Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -1^-} f_1(x) \quad (x^2 - 1 > 0)$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = -\infty = \lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) \quad (x^2 - 1 < 0)$$

άρα οι $x=1$, $x=-1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτοι.

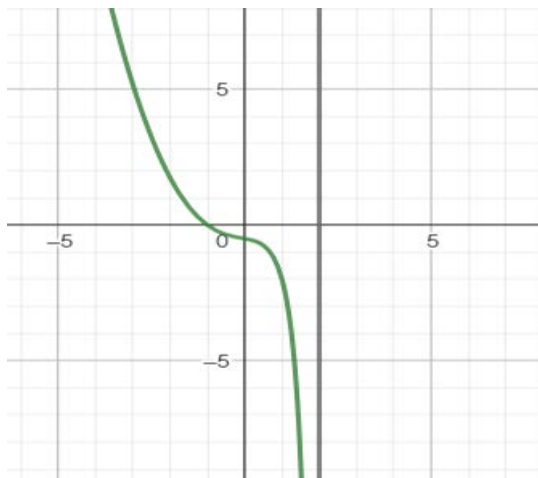


$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = +\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3+1}{x-2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3+1}{x-2} = -\infty$$

άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος



■

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν οι οριζόντιες, κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτοι της : $f_3(x) = \frac{3x^2+1}{4x-8}$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4} = +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+1}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4} = -\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Ακόμα

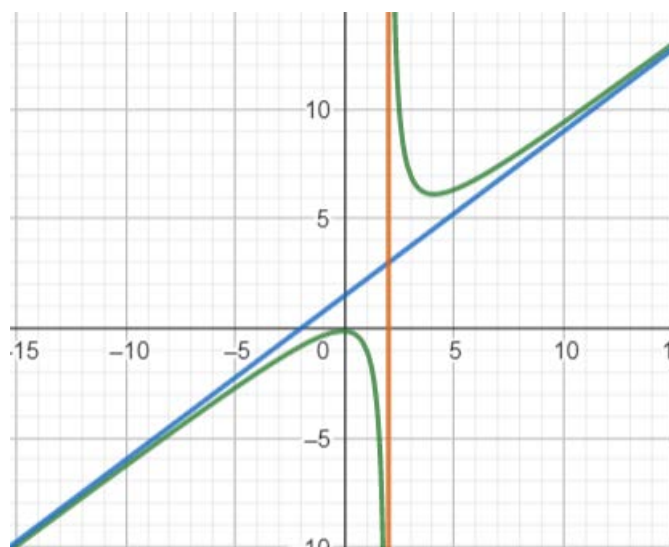
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2+1}{4x-8} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+1}{4x-8} = -\infty$$

άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος

$$\text{Τέλος, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2+1}{4x-8}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+1}{4x^2-8x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4} \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f_3(x) - \frac{3}{4}x \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2+1}{4x-8} - \frac{3}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{12x^2+4-12x^2+24x}{4(4x-8)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1+6x}{4x-8} \right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \beta \end{aligned}$$

Άρα, η ευθεία $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος του γραφήματος της $f_3(x) = \frac{3x^2 + 1}{4x - 8}$



■