

7. Έμμεση παραγωγή

Πολλές φορές μια άγνωστη συνάρτηση $y=y(x)$ συνδέεται με τη μεταβλητή (της) μέσω μιάς εξίσωσης της μορφής $F(x, y(x))=0$ (**πεπλεγμένη μορφή**). Και στην περίπτωση αυτή θα θέλαμε να υπολογίσουμε την παράγωγο $y'=y'(x)$. Η προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η εξής;

- (α) Προσπαθούμε να επιλύσουμε την εξίσωση $F(x, y(x))=0$ ως προς την $y=y(x)$ και κατόπιν να υπολογίσουμε την $y'=y'(x)$ κατά τα γνωστά. Υπάρχει θεώρημα, το λεγόμενο **θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων**, που παρέχει συνθήκες κάτω από τις οποίες μιά τέτοια επίλυση είναι δυνατή (**λυμένη μορφή**).
- (β) Σε αρκετές περιπτώσεις (π.χ όταν $\ln(xy) - e^{x+y} + y^2 = 5$), οι συνθήκες του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων δεν ικανοποιούνται και η $y=y(x)$ δεν μπορεί να βρεθεί σε μιά λυμένη μορφή (δηλαδή η $F(x, y(x))=0$ δεν μπορεί να λυθεί άμεσα ως προς $y=y(x)$). Σε αυτή την περίπτωση παραγωγίζουμε τη σχέση $F(x, y(x))=0$ (**έμμεση παραγωγή**), θεωρώντας ότι η συνάρτηση και $y=y(x)$ είναι συνάρτηση του x και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας. Ελπίζουμε, η σχέση που παίρνουμε με την $y'=y'(x)$ να μπορεί να επιλυθεί για την $y'=y'(x)$.

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=y(x)$ που ικανοποιεί τη σχέση $x^2+xy+y^5=3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα της $y=y(x)$, στο σημείο $(1,1)$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα της $y=y(x)$, στο σημείο $(1,1)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y - y(1) = y'(x)(x-1)$$

Αλλά, παραγωγίζοντας έμμεσα τη σχέση $x^2+xy+y^5=3$, έχουμε:

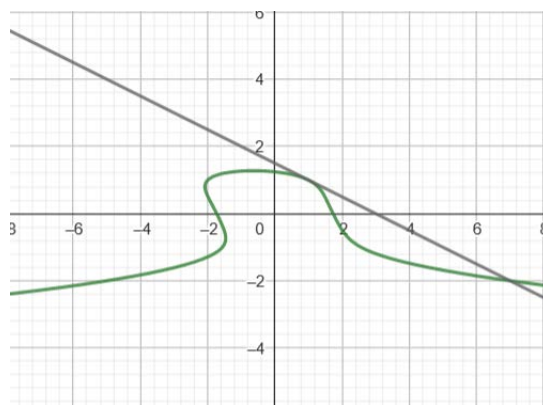
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2+xy+y^5) &= \frac{d}{dx}(3) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^5) = 0 \Rightarrow \\ 2x+y+x \frac{dy}{dx} + 5y^4 \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow (x+5y^4) \frac{dy}{dx} = -2x-y \Rightarrow \\ y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) &= -\frac{2x+y}{x+5y^4} \end{aligned}$$

οπότε:

$$y'(1) = -\frac{2 \cdot 1 + y(1)}{1 + 5y^4(1)} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 5 \cdot 1} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Εφαρμογή 2

Βρείτε την κλίση του γραφήματος της $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ στο σημείο (3,1).

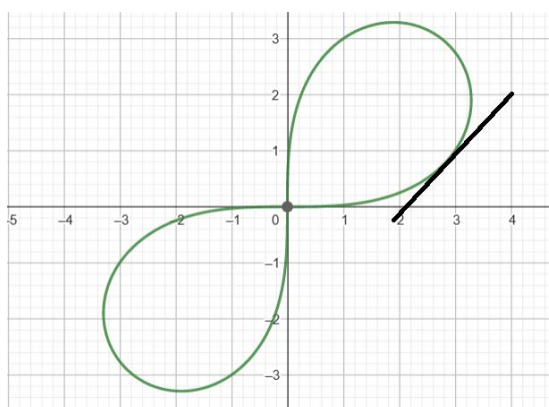
Λύση

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3(x^2+y^2)^2) &= \frac{d}{dx}(100xy) = 100y + 100x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ 2 \cdot 3(x^2+y^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+y^2) &= 100y + 100x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ 6(x^2+y^2) \cdot \left(2x + 2y \frac{dy}{dx}\right) &= 100y + 100x \frac{dy}{dx} \\ 3(x^2+y^2) \cdot \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) &= 25y + 25x \frac{dy}{dx} \\ y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{25y - 3x(x^2+y^2)}{3y(x^2+y^2) - 25x}\end{aligned}$$

Τελικά, η ζητούμενη κλίση είναι η:

$$y'(3) = \frac{25 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 1^2)}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1^2) - 25 \cdot 3} = \frac{25 - 90}{30 - 75} = \frac{13}{9} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$, στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Λύση

1^{ος} τρόπος (έμμεση παραγωγή)

Η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$, στο σημείο $M(x_1, y_1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$$

Αλλά, παραγωγίζοντας έμμεσα τη σχέση $x^2+y^2=\rho^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2+y^2) &= \frac{d}{dx}(\rho^2) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'(x_1) = -\frac{x_1}{y_1} \end{aligned}$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 = \rho^2$$

Δηλαδή $yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 = \rho^2$ ή ισοδύναμα $yy_1 + xx_1 = \rho^2$

2^{ος} τρόπος (λυμένη μορφή).

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $M(x_1, y_1)$ βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο ($y(x) > 0$).

Θα μπορούσαμε να λύσουμε τη σχέση $x^2+y^2=\rho^2$ ως προς $y(x)$. Πράγματι:

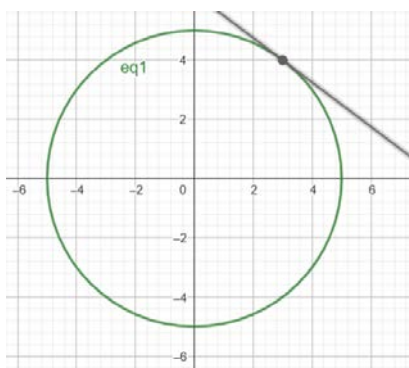
$x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow y^2=\rho^2-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{\rho^2-x^2}$, και η παράγωγος της δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{\rho^2 - x^2} \right)' = \left(\left(\sqrt{\rho^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{\rho^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}-1} \right) \frac{d}{dx}(\rho^2 - x^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \end{aligned}$$

οπότε

$$y'(x_1) = -\frac{x_1}{\sqrt{\rho^2 - x_1^2}} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Κατόπιν συνεχίζουμε όπως στον 1^ο τρόπο.



Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2 + y^2 = 5^2$, στο σημείο $M(3, 4)$.

Λύση

Με τη βοήθεια των παραπάνω έχουμε ότι, η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η:

$$4y + 3x = 5^2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

■

Ρυθμός μεταβολής

Ορισμός

Εάν δύο (μεταβλητά) μεγέθη x, y συνδεόνται με μια σχέση της μορφής $y=f(x)$ και η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε η παράγωγος:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 .

Εφαρμογή 4

Μιά σφαιρική μπάλα πάγου αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της r που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$ με t σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$ sec.

Λύση

(I) (εμβαδόν επιφάνειας). Το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας ακτίνας r , δίνεται από τη σχέση

$$E = E(t) = 4\pi r^2 = 4\pi r^2(t)$$

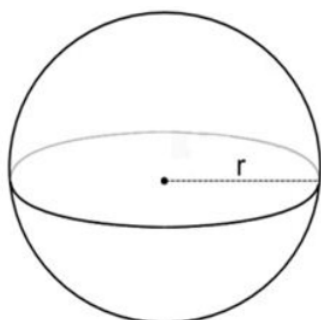
Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} (4\pi r^2) = 4 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot r(t) \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\text{Αλλά } \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (4 - t^2) = -2t \text{ οπότε } \frac{dr}{dt}(1) = -2 \cdot 1 = -2.$$

Τελικά;

$$\frac{d}{dt} E(1) = 8\pi \cdot r(t) \frac{dr(t)}{dt} = 8\pi \cdot (4 - 1^2) (-2) = -48\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$



(II) (όγκος μπάλας). Ο όγκος σφαίρας ακτίνας r , δίνεται από τη σχέση

$$V=V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}V=\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3\cdot r^2\frac{dr}{dt}=4\pi\cdot r^2(t)\frac{dr(t)}{dt}$$

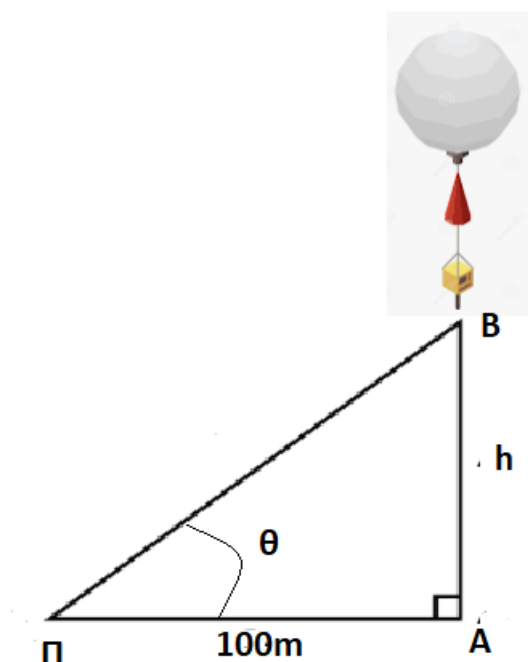
Τελικά

$$\frac{d}{dt}V(1)=4\pi\cdot r^2(t)\frac{dr(t)}{dt}=4\pi\cdot (4-1^2)^2(-2)=-72\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$$

■

Εφαρμογή 5

Ένα μετεωρολογικό μπαλόνι (στη θέση B) αφήνει το έδαφος, σε απόσταση 100m από παρατηρητή Π, με ταχύτητα $50\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Με ποιό ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΒΠ με το έδαφος, τη στιγμή που το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



Λύση

Εάν $\theta=\theta(t)$ η ζητούμενη γωνία, τότε $\varepsilon\phi\theta(t)=\frac{h(t)}{100}$ όπου $h(t)$ η απόσταση του μπαλονιού από το έδαφος. Αλλά τότε:

$$(\varepsilon\phi\theta(t))'=\frac{h'(t)}{100}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\theta(t)}\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{h'(t)}{100}\Rightarrow\frac{d\theta(t)}{dt}=\sin^2\theta(t)\cdot\frac{h'(t)}{100}$$

Αλλά τη χρονική στιγμή $t_0=1$ που το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m, έχουμε:

$$h'(t_0)=50\frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ και } \sin\theta(t_0)=\frac{\text{ΠΑ}}{\text{ΠΒ}}=\frac{100}{\sqrt{100^2+100^2}}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\theta(t_0)=45^\circ)$$

Τελικά, ο ρυθμός που αυξάνεται η γωνία θ , είναι ίσος με:

$$\frac{d\theta(t_0)}{dt} = \sin^2\theta(t_0) \cdot \frac{h'(t_0)}{100} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{50}{100} = \frac{1}{4} \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

■

Εφαρμογή 6

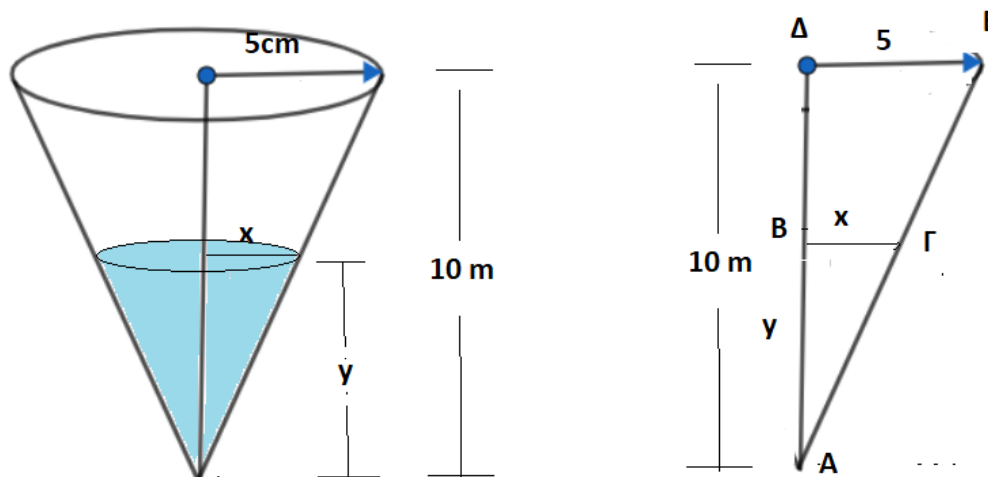
Στην κωνική δεξαμενή του παρακάτω σχήματος τρέχει νερό με ταχύτητα $50 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$.

Πόσο γρήγορα ανέρχεται το ύψος του νερού, τη στιγμή που το νερό έχει ύψος 6m.

Λύση

Εάν $V=V(t)$ είναι ό όγκος του νερού, $x(t)$ η ακτίνα του κύκλου της επιφάνειας του νερού (τη χρονική στιγμή t) και $y(t)$ το ύψος του νερού της χρονική στιγμή t , τότε:

$$V=V(t)=\frac{1}{3}\pi x^2(t) \cdot y(t)$$



Αλλά τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια, οπότε έχουμε:

$$\frac{AB}{AA} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Rightarrow \frac{y(t)}{10} = \frac{x(t)}{5} \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)}{2}$$

Επομένως

$$V=V(t)=\frac{1}{3}\pi x^2(t) \cdot y(t)=\frac{1}{3}\pi \left(\frac{y(t)}{2}\right)^2 \cdot y(t)=\frac{1}{12}\pi y^3(t)$$

Και

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi y^3(t)\right) = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 3 \cdot y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}\pi \cdot y^2 \frac{dy}{dt}$$

Αλλά: $\frac{dV(t)}{dt} = 2$, $y = 6$ οπότε

$$2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{9\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

■