

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

A. Ορισμός Παραγώγου

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **παράγωγο** ή ότι είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $x=x_0$ όταν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

το οποίο καλείται **παράγωγος της f** στο σημείο x_0 . Πολλές φορές γράφουμε $\frac{df}{dx}(x_0)$ αντί για $f'(x_0)$. Το όριο:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x=x_0$ ενώ το όριο:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **αριστερή (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x=x_0$.

Παρατήρηση

(α) Είναι προφανές ότι για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$ θα πρέπει:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

και αντίστροφα.

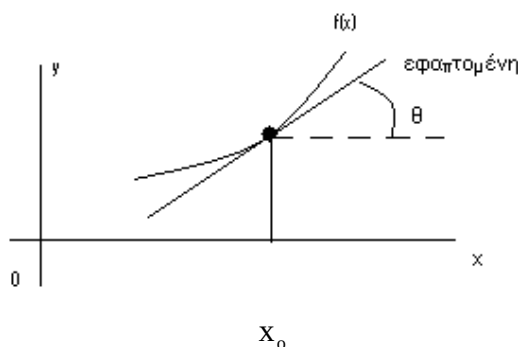
(β) Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα, δηλαδή $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε στα σημεία a, b μπορούμε να μιλάμε για πλευρικές παραγώγους μόνο (αριστερά και δεξιά πλευρική παράγωγο αντίστοιχα). Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα, δηλαδή $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, τότε μιλάμε για παράγωγο μόνο στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος (δηλαδή στα σημεία x_0 τέτοια ώστε $a < x_0 < b$).

(γ) Η ποσότητα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ καλείται **μέση μεταβολή** της $f(x)$ από το x_0 ως το x . Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$, η $f'(x_0)$ καλείται και **ρυθμός μεταβολής** της f στο x_0 .

(δ) Ένας ισοδύναμος ορισμός της παραγώγου είναι και ο: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

B. Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$



Η εξίσωση της **εφαπτομένης** της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τη σχέση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

όπου $f'(x_0) = \kappaλίση$ της εφαπτομένης.

Παρατήρηση

Η $f'(x_0) = \epsilon\phi\theta$ όπου θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο x_0 με τον άξονα των x .

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (β) $f(x) = \sin x$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x^1x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x^1x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ φορές}} = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cdot \sin h - \eta\mu(x_0) \cdot \eta\mu h - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin h - 1) \sin(x_0) - \eta\mu(x_0) \cdot \eta\mu h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin h - 1)}{h} \sin(x_0) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} \eta\mu(x_0) \end{aligned}$$

Αλλά είναι γνωστό ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin h - 1)}{h} = 0$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1$ οπότε:

$$f'(x_0) = \sin'(x_0) = -\eta\mu(x_0)$$

■

Πρόταση 1 (κανόνες παραγώγισης)

Εάν οι συναρτήσεις $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο $x=x_0$ (εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$), τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (με $g(x_0) \neq 0$) είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x=x_0$ και ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

$$(\alpha) \text{ (αθροίσματος)} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(\beta) \text{ (διαφοράς)} \quad (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(\gamma) \text{ (γινομένου)} \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$(\delta) \text{ (πηλίκου)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Προσοχή, στον κανόνα του πηλίκου, λόγω του $-$ που υπάρχει στον αριθμητή παίζει ρόλο η σειρά με την οποία παραγωγίζουμε.

Πρόταση 2 (κανόνας αλυσίδας ή σύνθετη παραγωγή)

Εάν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x=x_0$ (εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$) και η $g: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ (έστω ότι $f([a, b]) \subseteq [\gamma, \delta]$) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = f(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$ και ισχύει:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Γ. Ορισμός 2^{ης} παραγώγου

Η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο x_0 ορίζεται σαν: $f''(x_0) = (f'(x_0))'$ ή

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x_0) \right)$$

Ανάλογα ορίζεται και η $n^{\text{οστή}}$ τάξης παράγωγος:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\dots \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x_0) \right) \right) \dots \right)}_{n \text{ φορές}}$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$(\alpha) f_1(x) = 2^x e^x \quad (\beta) f_2(x) = \eta \mu(\sin^2 x) \quad (\gamma) f_3(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (\delta) f_4(x) = \epsilon \phi x$$

Λύση

(α) Για την $f_1(x) = 2^x e^x$ (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου):

$$f_1'(x) = (2^x e^x)' = (2^x)' e^x + 2x(e^x)' \stackrel{(a^x)' = a^x \log x}{\Rightarrow} f_1'(x) = 2^x \log x \cdot e^x + 2^x e^x$$

(β) Για την $f_2(x) = \eta\mu(\sin^2 x)$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (\eta\mu(\sin^2 x))' = \text{χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \\ &= \eta\mu'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' = \sin(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin(\sin^2 x) \cdot \sin x \cdot \eta\mu x \end{aligned}$$

(γ) Για την $f_3(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \right)' = \left(\left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{1/3} \right)' \stackrel{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{1/3-1} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^2} \right)} \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^2}} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \dots \end{aligned}$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, έχουμε:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= (εφ x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x} \right)' = \frac{\eta\mu' x \cdot \sin x - \eta\mu x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \sin x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Μερικοί συμβολισμοί $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^{\mu}} = a^{\frac{\mu}{n}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

■

Εφαρμογή 3

(α) Εάν $f(x) = \eta\mu x$ να υπολογιστεί η $n^{\text{οστής}}$ τάξης παράγωγός της.

(β) Εάν $f(x) = \sin x$ να υπολογιστεί η $n^{\text{οστής}}$ τάξης παράγωγός της.

Λύση

(α) Είναι προφανές ότι:

$$f'(x) = \sin x, \quad f''(x) = -\eta\mu x, \quad f'''(x) = -\sin x, \quad f^{(4)}(x) = \eta\mu x = f(x)$$

Οπότε, μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(4n+1)}(x) = \sin x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\eta\mu x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4n+4)}(x) = f^{(4n)}(x) = \eta\mu x$$

(β) Είναι προφανές ότι:

$$f'(x) = -\eta\mu x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = \eta\mu x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$$

Οπότε, μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(4n+1)}(x)=-\eta\mu x, \quad f^{(4n+2)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x, \quad f^{(4n+3)}(x)=\eta\mu x, \quad f^{(4n+4)}(x)=f^{(4n)}(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

■

Παράδειγμα

Εάν $f(x)=\eta\mu x$, να υπολογιστεί η $f^{(75)}(x)$.

Λύση

Έχουμε: $f^{(75)}(x)=f^{(4\cdot 18+3)}(x)=f^{(3)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x$

■

Εφαρμογή 4

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εφαπτομένη που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{\pi^2}{8}$.

Λύση

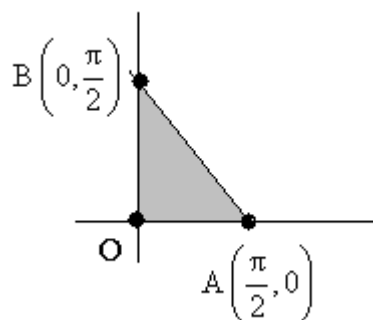
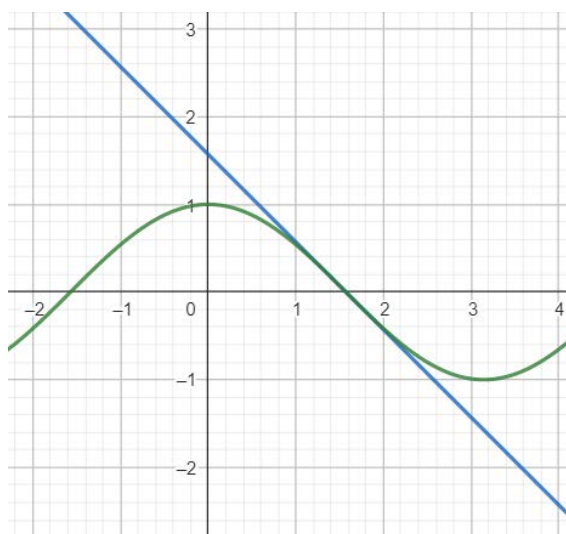
Έχουμε $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ άρα η εφαπτομένη στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εξίσωση :

$$y-0=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά $f'(x)=-\eta\mu x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu \frac{\pi}{2}=-1$ και η εφαπτομένη γίνεται

$$y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2}$$

και η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Το τρίγωνο AOB που σχηματίζεται έχει εμβαδόν:

$$E_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

■

Εφαρμογή 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ax^2+\beta x+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Βρείτε τα α, β για τα οποία οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$

Λύση

Οι δύο συναρτήσεις θα πρέπει να τέμνονται στο ίδιο σημείο $x_0=1$ (περνούν από το ίδιο σημείο Α με τετμημένη $x_0=1$) δηλαδή θα ισχύει :

$$f(1)=g(1) \quad (1)$$

Αλλά

$$g(1)=\frac{1}{1}=1 \text{ άρα } f(1)=\alpha+\beta+2=1 \Rightarrow \alpha+\beta=-1 \quad (2)$$

Ακόμα, αφού οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια εφαπτομένη, θα ισχύει :

$$f'(1)=g'(1) \quad (3)$$

(γιατί $g'(x)$ = κλίση της εφαπτομένης στο σημείο x).

Αλλά

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \text{ και } g'(1)=-1$$

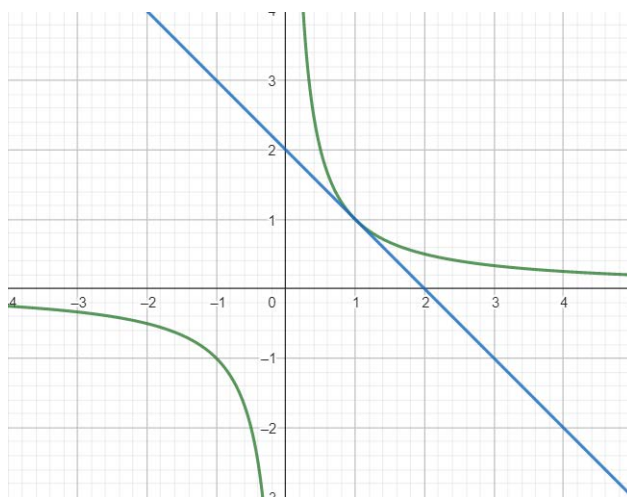
$$f'(x)=(\alpha \cdot x^2+\beta \cdot x+2)'=2\alpha x+\beta \text{ και } f'(1)=2\alpha+\beta=-1 \quad (4)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από τη σχέση (4) έχουμε :

$$2\alpha+\beta-\alpha-\beta=-1-(-1) \Rightarrow \alpha=0 \text{ άρα } (2) \Rightarrow \beta=-1$$

Δηλαδή

$$y=f(x)=-x+2$$



Παρατήρηση

Αποδείξτε ότι η $y=f(x)=-x+2$ είναι η εφαπτομένη της $g(x)=\frac{1}{x}$ στο σημείο $x_0=1$ (και έτσι η f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$).

■

Γ. Συνέχεια και παραγωγισιμότητα

Πρόταση

Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο $x=x_0$.

Παρατήρηση

(1) Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x=x_0$, τότε δεν έπεται (απαραίτητα) ότι είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$.

Π.χ η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Πράγματι:

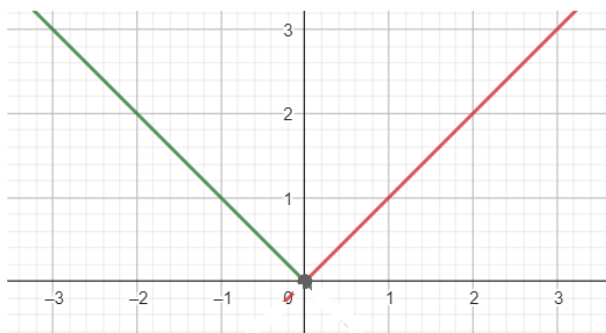
Η συνάρτηση γράφεται ισοδύναμα σαν $f(x)=|x|=\begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ γιατί:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη όμως στο σημείο $x=0$, γιατί:

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists f'(0)$$



Το παράδειγμα μας δείχνει ακόμα ότι μπορεί να υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι μιας συνάρτησης σε ένα σημείο αλλά, να μην υπάρχει η παράγωγός της συνάρτησης στο σημείο.

Γενικότερα, αν το γράφημα μιας συνάρτησης παρουσιάζει «γωνίες» σε μερικά σημεία, τότε στα σημεία αυτά δεν υπάρχει η παράγωγός της.

(2) Αν όμως, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο $x=x_0$, τότε έπεται ότι **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$.

Εφαρμογή 6

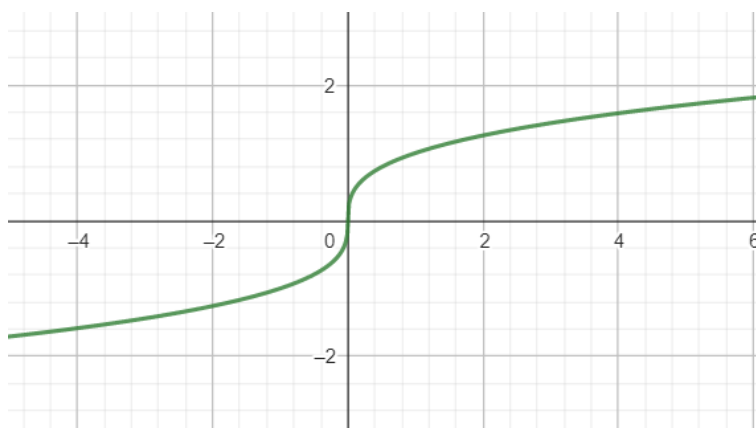
Εάν $f(x) = \sqrt[3]{x}$ να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.



■

Παρατήρηση

(I) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

(II) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι η κατακόρυφος ευθεία $x = 0$.

Εφαρμογή 7

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \lambda^2 x, & x < 1 \\ 5x + \lambda - 4, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι:

(α) Συνεχής στο 1.

(β) Παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση

(α) Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο σημείο 1 πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - \lambda^2 x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + \lambda - 4) = f(1)$$

ή ισοδύναμα:

$$3 - \lambda^2 = 5 + \lambda - 4$$

Από τη τελευταία προκύπτει:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

οπότε $\lambda = -2$ ή $\lambda = 1$.

- (β) Επειδή για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο αυτό, θα εξετάσουμε την f για εκείνα τα λ για τα οποία είναι συνεχής στο σημείο $x=1$, δηλαδή (λόγω του αποτελέσματος του (α)) για $\lambda = -2$ και $\lambda = 1$.

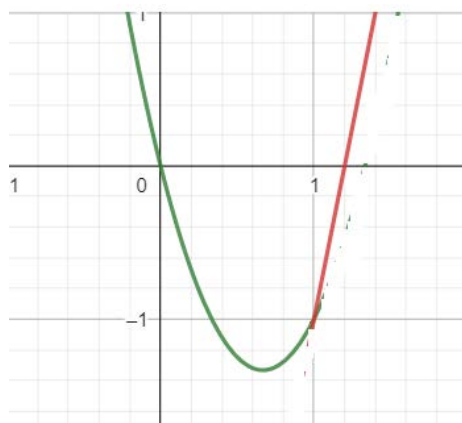
- (i) Για $\lambda = -2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[3x^2 - (-2)^2 x] - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(5x - 2 - 4) - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x-1)}{x-1} = 5 \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, οπότε η συνάρτηση f για $\lambda = -2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.



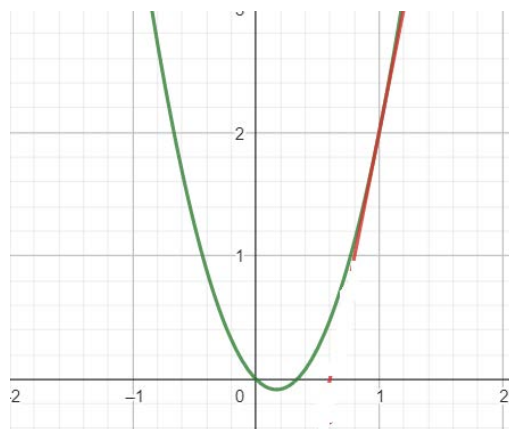
- (ii) Για $\lambda = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x^2 - x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+2) = 5 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(5x + 1 - 4) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, οπότε η συνάρτηση f για $\lambda = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.



■

Δ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τότε:

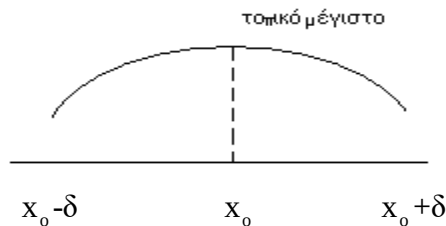
- Αν $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
- Αν $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Ε. ΣΤΑΣΙΜΑ, ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ, ΜΕΓΙΣΤΑ, ΕΛΑΧΙΣΤΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ

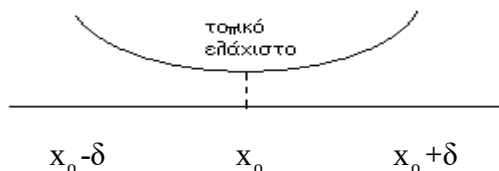
Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τότε:

Ορισμός

1. Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, το x_0 καλείται **στάσιμο** σημείο της f .
2. Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι είτε στάσιμο σημείο είτε δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε το x_0 καλείται **κριτικό** σημείο της f .
3. Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_0) \geq f(x)$ τότε το x_0 καλείται **τοπικό μέγιστο** της f .



4. Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_0) \leq f(x)$ τότε το x_0 καλείται **τοπικό ελάχιστο** της f .



5. Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f . καλούνται **τοπικά ακρότατα**.

Ζ. Θεώρημα (Fermat)

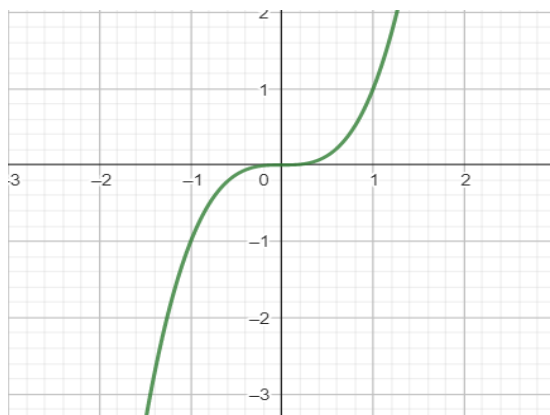
Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (a, b)$, τότε $f'(x_0) = 0$.

Παρατήρηση

Αν $f'(x_0) = 0$ **δεν** συνεπάγεται (απαραίτητα) ότι το x_0 είναι σημείο ακρότατου.

Παράδειγμα

Εάν $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ και το σημείο $x=0$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.



Η. Εύρεση Ακρότατων (κριτήριο 2^{ης} Παραγώγου)

Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ (δηλαδή το x_0 είναι στάσιμο σημείο)

- αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0 ίσο με το $f(x_0)$
- αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0 ίσο με το $f(x_0)$.

Θ. ΚΟΙΛΗ-ΚΥΡΤΗ ΚΑΜΠΥΛΗ

Θεώρημα 1

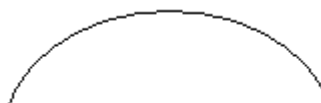
Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε:

- αν $f''(x_0) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω)



κυρτή συνάρτηση

- αν $f''(x_0) < 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω)

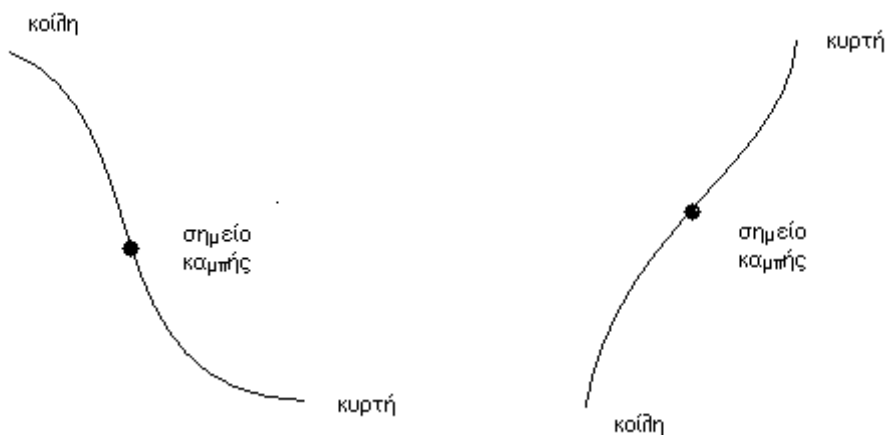


κοίλη συνάρτηση

Ι. Σημείο καμπής

Ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καλείται σημείο καμπής της f αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω :

1. δεν υπάρχει η $f''(x_0)$
2. η f είναι κυρτή στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και κοίλη στο διάστημα $[x_0, \beta)$ ή αντίστροφα



Θεώρημα 2

Αν $\exists f''(x_0)$ και το $x_0 = \text{σημείο καμπής} \Rightarrow f''(x_0) = 0$

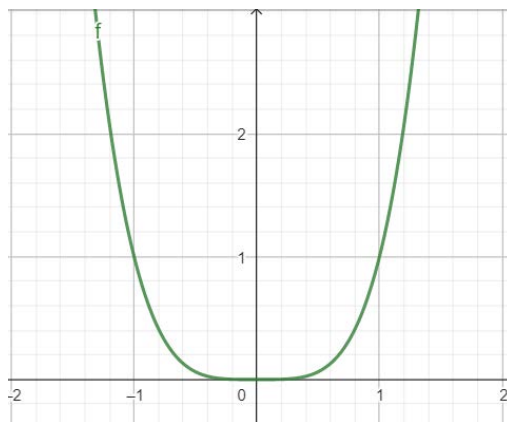
Παρατήρηση

(α) Από το θεώρημα γίνεται φανερό ότι τα σημεία καμπής της $f(x)$ βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες της $f''(x_0) = 0$.

(β) Εάν $f''(x_0) = 0$ τότε δεν συνεπάγεται ότι το x_0 είναι (απαραίτητα) σημείο καμπής.

Παράδειγμα

Εάν $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'(0)=f''(0)=0$ και το σημείο $x=0$ δεν είναι σημείο καμπής (η συνάρτηση είναι κυρτή δεξιά και αριστερά του 0).



■

Εφαρμογή 8

Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, καμπυλότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^2$.

Λύση

Έχουμε $f(0)=0$, $f(-1)=-1=f(1)$, ενώ η $f(x)$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x^4-2x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\sqrt{2} \text{ \& } x=-\sqrt{2}$. Επίσης η $f(x)$ είναι **άρτια** δηλαδή $f(x)=f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το γράφημα της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y .

Ακόμα έχουμε $f'(x)=(x^4-2x^2)' = 4x^3-4x = 0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$					
	τοπικό ελάχιστο	τοπικό μέγιστο	τοπικό ελάχιστο		

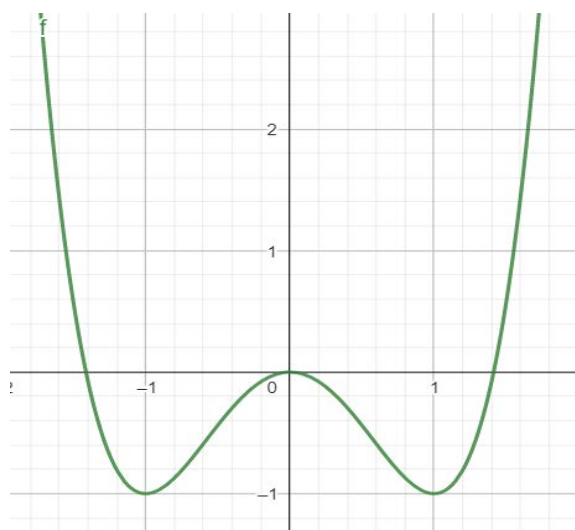
Άρα η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=0$ και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x=1$ και $x=-1$.

$$\text{Ακόμα } f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ή } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	
$f(x)$				
	σημείο καμπής	σημείο καμπής		

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα σημεία $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ είναι σημεία καμπής.



Εφαρμογή 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 3 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (επομένως και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με παράγωγο:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

Επίσης είναι $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Άρα η συνάρτηση θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Επομένως θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -1$, ίσο με το:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 - \lambda = 5 - \lambda$$

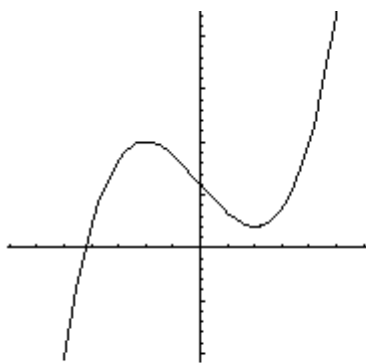
και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$, ίσο με το:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 - \lambda = 1 - \lambda$$

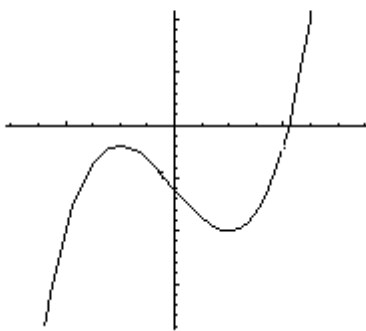
(β) Η συνάρτηση που μας δίνεται είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Επομένως μπορεί να έχει:

- (I) μια ακριβώς πραγματική ρίζα και δύο μιγαδικές, γιατί είναι γνωστό ότι εάν μια εξίσωση έχει σαν ρίζα έναν μιγαδικό αριθμό, τότε έχει σαν ρίζα και τον συζυγή του (σχήματα 1,2) είτε
- (II) δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, μία απλή και μία διπλή (τρεις πραγματικές δηλαδή) (σχήματα 3,4), είτε
- (III) τρεις, διαφορετικές ανά δύο, πραγματικές ρίζες (σχήματα 5,6).

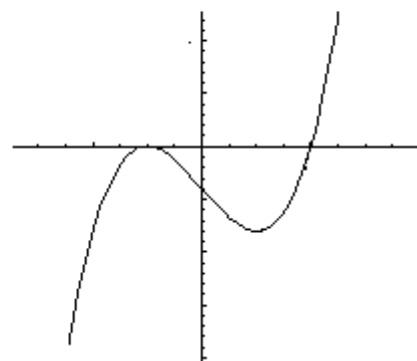
Χρησιμοποιώντας λοιπόν το γεγονός αυτό και τα συμπεράσματα του (α) ερωτήματος (δηλαδή το ότι στο σημείο $x = 1$ έχουμε μέγιστο και στο σημείο $x = -1$ ελάχιστο), μπορούμε να πούμε ότι το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ έχει μια από τις παρακάτω μορφές:



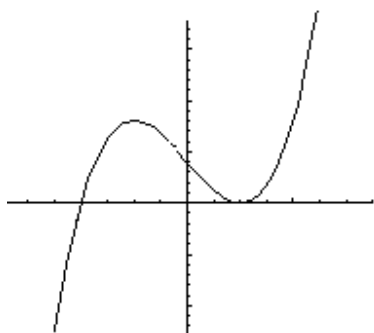
Σχήμα 1



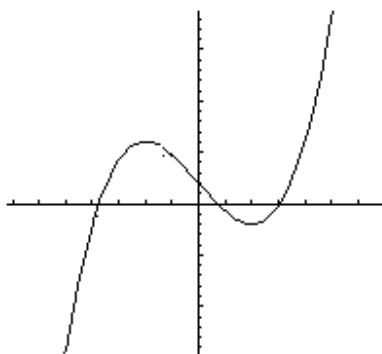
Σχήμα 2



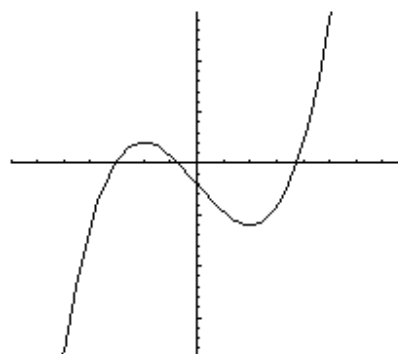
Σχήμα 3



Σχήμα 4



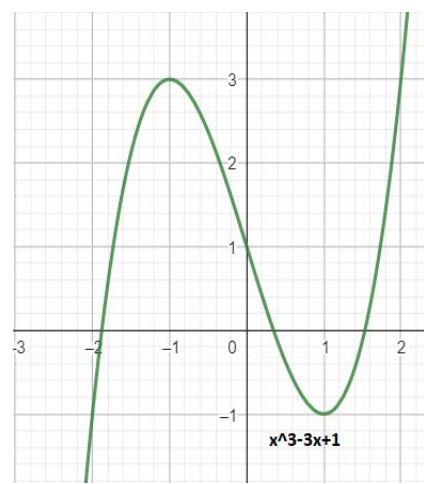
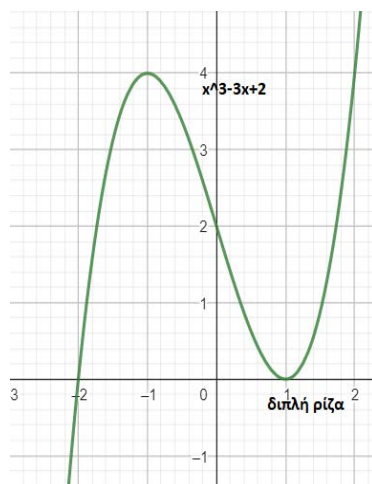
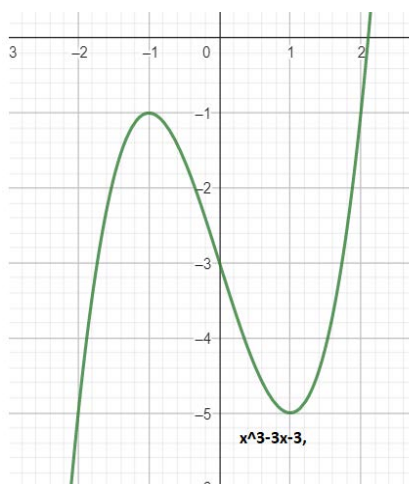
Σχήμα 5



Σχήμα 6

Θα εξετάσουμε λοιπόν το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία $x=1$ και $x=-1$, δηλαδή το πρόσημο των $f(-1)=5-\lambda$ & $f(1)=1-\lambda$.

- Αν $(5-\lambda < 0 \text{ και } 1-\lambda < 0)$ ή $(5-\lambda > 0 \text{ και } 1-\lambda > 0)$, δηλαδή αν $\lambda < 1$ ή $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα (δείτε σχήματα 1 και 2).
- Αν $5-\lambda = 0$ ή $1-\lambda = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 5$ ή $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Στην πραγματικότητα έχει τρεις πραγματικές ρίζες δύο από τις οποίες είναι ίσες, δηλαδή διπλή ρίζα (δείτε σχήματα 3 και 4).
- Αν $5-\lambda > 0$ και $1-\lambda < 0$, δηλαδή αν $1 < \lambda < 5$ η εξίσωση έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες (σχήματα 5 και 6).



■

Κ. Συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα, μέγιστο & ελάχιστο

Θεώρημα 3

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε η f έχει πάντα (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο στο $[a,b]$.

Το μέγιστο, ελάχιστο είναι είτε σε ένα από τα στάσιμα σημεία (δηλαδή τις ρίζες της $f'(x)=0$) είτε στα άκρα του διαστήματος.

Βρίσκουμε λοιπόν τις τιμές της $f(x)$ στα στάσιμα σημεία και τα άκρα του διαστήματος. Η μεγαλύτερη τιμή από αυτές είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο

Εφαρμογή 10

Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο (ολικά) της συνάρτησης $f(x)=2x^3-15x^2+36x$ στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$, άρα έχει οπωσδήποτε (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο τα οποία είναι είτε ακρότατα είτε τα άκρα του διαστήματος $[1, 5]$.

Για τα ακρότατα:

$$f'(x) = (2x^3 - 15x^2 + 36x)' = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

Υπολογίζοντας τις τιμές της $f(x)$ στα σημεία 2 και 3 καθώς και στα άκρα του διαστήματος 1 και 5, έχουμε:

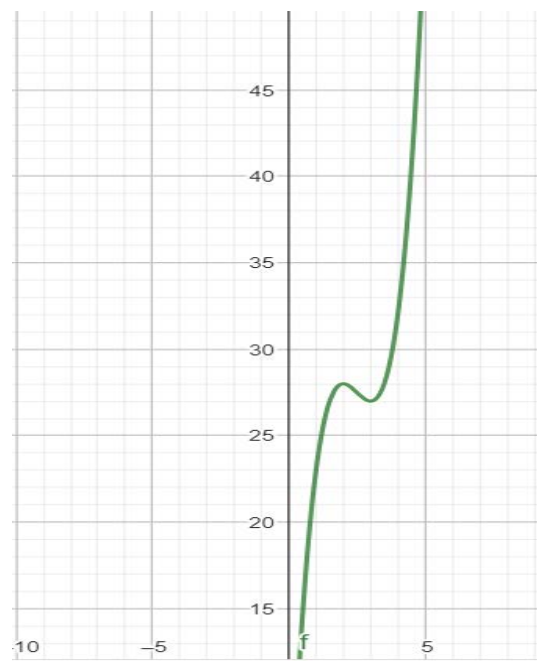
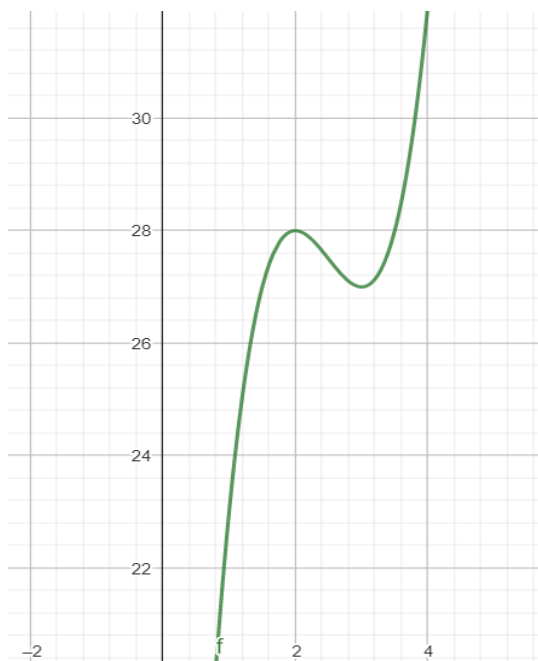
$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 23$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 28$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 = 27$$

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 = 55$$

Η μέγιστη τιμή είναι 55 που συμβαίνει στο σημείο $x=5$ και η ελάχιστη τιμή είναι 23 που συμβαίνει στο σημείο $x=1$. Άρα έχουμε μέγιστο στο σημείο 5 (άκρο διαστήματος) και ελάχιστο στο σημείο 1 (άκρο διαστήματος).



■