

5. Απειρο όριο συνάρτησης σε πεπερασμένο σημείο

(B) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, όπου D ένα σύνολο της μορφής $D = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Ορισμός (ε,δ ορισμός)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $+\infty$ για $x \rightarrow x_0$ (του x **τείνοντος στο x_0**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

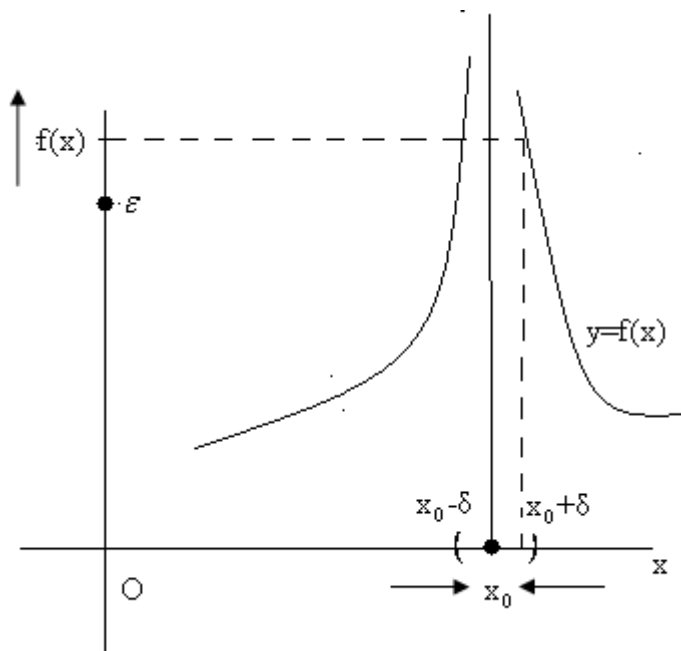
όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y = f(x)$ γίνονται μεγάλες (είναι μεγαλύτερες από το ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 4)



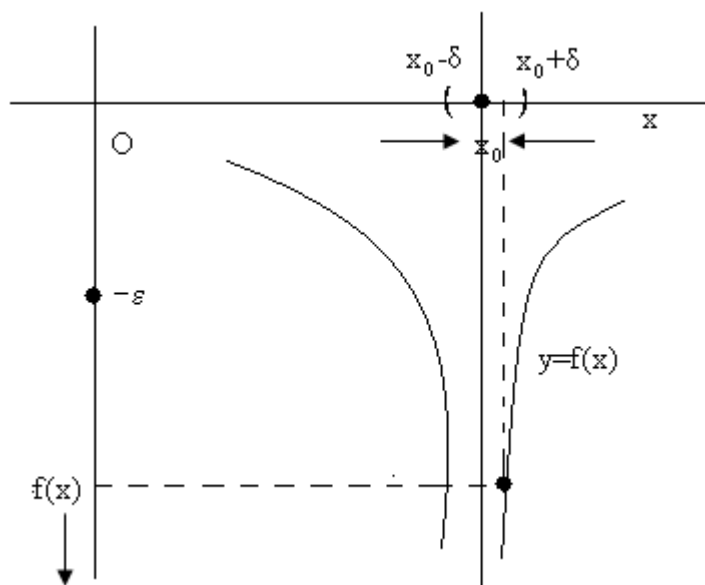
Σχήμα 4

Ανάλογα, θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $-\infty$ για $x \rightarrow x_0$ (του x **τείνοντος στο x_0**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο:

αν $|x-x_0| < \delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$



Σχήμα 5

Δηλαδή όταν τα x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ γίνονται μικρές (είναι μικρότερες από το ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 5).

Παράδειγμα

Να δειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty$

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{4}{x-2}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

$$|x-2| < \delta$$

τότε:

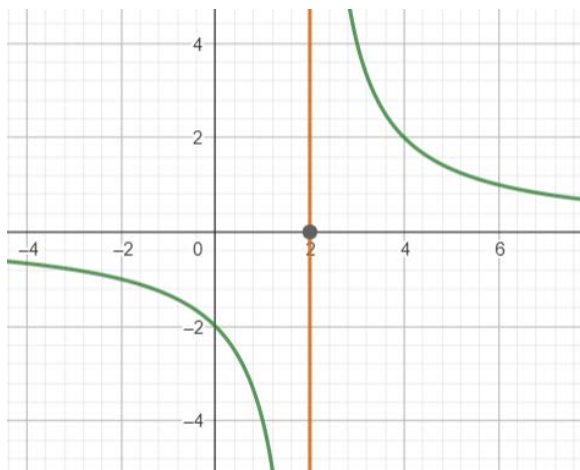
$$f(x) > \varepsilon$$

Αλλά $\left| \frac{4}{x-2} \right| > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{4} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{4}{\varepsilon}$, οπότε εάν θεωρήσουμε $\delta = \frac{4}{\varepsilon}$, τότε εάν x

τέτοιο ώστε: $|x-2| < \delta = \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{4}{x-2} \right| > 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.

Παρατήρηση

Η απόλυτη τιμή στις παραπάνω σχέσεις μπορεί να παραλειφθεί μιάς και $x \rightarrow 2^+$ οπότε $x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$



■

Πρόταση

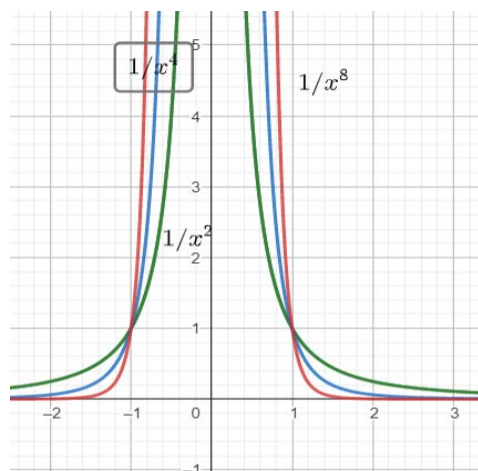
Ισχύουν τα εξής:

(I) Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(II) Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (για κάποιο α), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Εφαρμογή: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty, n \in \mathbb{N}^*$

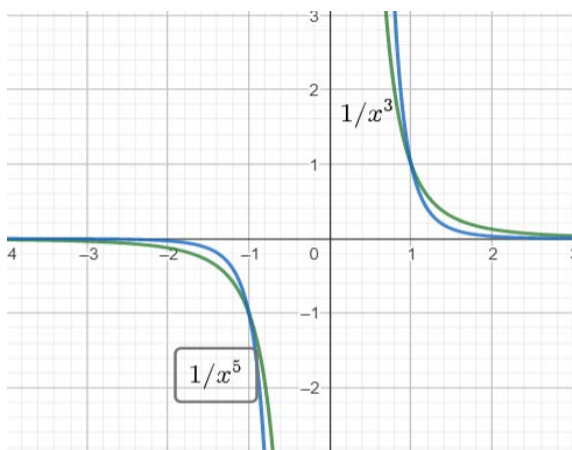


(III) Ανάλογα, εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (για κάποιο α),

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Εφαρμογή:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} &= +\infty, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} &= -\infty, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}}$$



Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

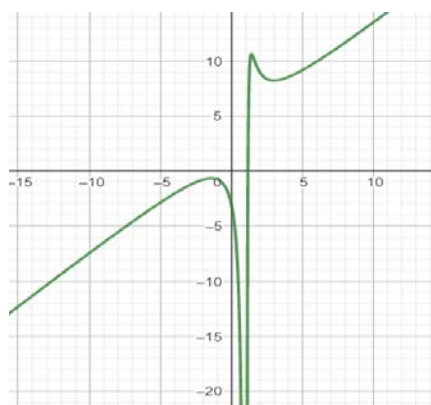
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x-1} \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2 + x}$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = (1^3 + 1^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 1$ το $(x-1)^2 \rightarrow 0$ & $(x-1)^2 > 0$, οπότε λόγω του (II) της παραπάνω εφαρμογής έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.



Τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

(β) Εργαζόμενοι ανάλογα όπως στο (α) έχουμε:

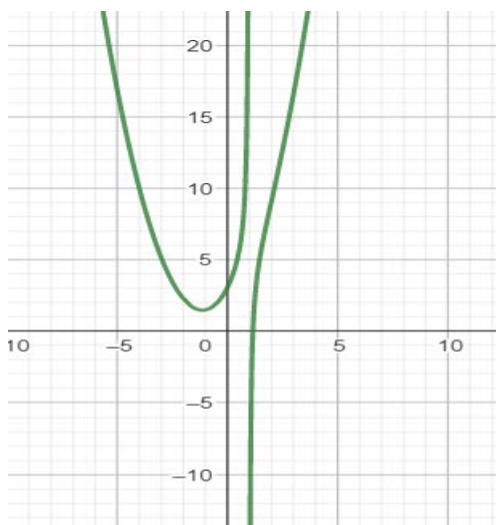
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$$

Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 1^+$ το $(x - 1) \rightarrow 0$ & $(x - 1) > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Ανάλογα, καθώς το $x \rightarrow 1^-$ το $(x - 1) \rightarrow 0$ & $(x - 1) < 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty.$$



Τέλος, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x}$$

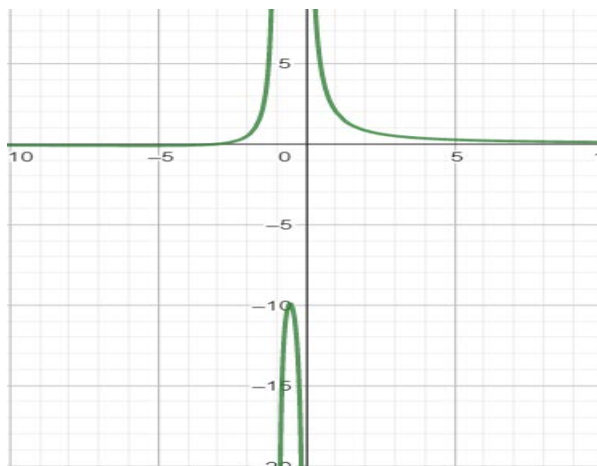
Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 0^+$ το $x^2 + x = x(x + 1) \rightarrow 0$ & $x^2 + x > 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ακόμα, καθώς το $x \rightarrow 0^-$ το $x^2 + x = x(x + 1) \rightarrow 0$ & $x^2 + x < 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + x} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, έπεται ότι $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 + x}$



■

Εφαρμογή 2

Εάν έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{f(x)} = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

Εάν θέσουμε $g(x) = \frac{x+3}{f(x)}$ τότε: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ (και $g(x) \neq 0$ κοντά $x=1$). Ακόμα:

$$f(x) = \frac{x+3}{g(x)}, \text{ οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = 4 \cdot 0 = 0$$

■

Παρατήρηση

Οι μορφές: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι απροσδιόριστες μορφές και εξετάζονται αναλυτικά σε άλλη παράγραφο.

(Γ) Όριο της συνάρτησης στο άπειρο (πεπερασμένο/άπειρο)

- (1) Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \rightarrow +\infty$ (**του x τείνοντος στο συν άπειρο**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

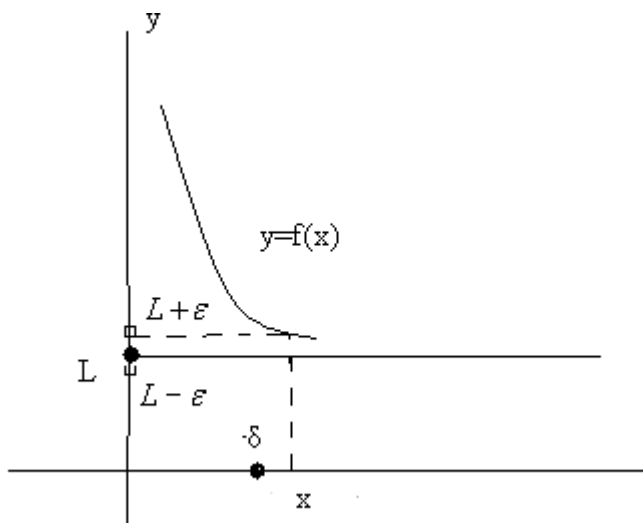
όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$x > \delta$$

τότε:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x γίνονται μεγάλα (μεγαλύτερα από ένα δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό L (σε απόσταση μικρότερη από ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 6)



Σχήμα 6

Ανάλογα ορίζεται και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=L$

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

$$x > \delta$$

τότε:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

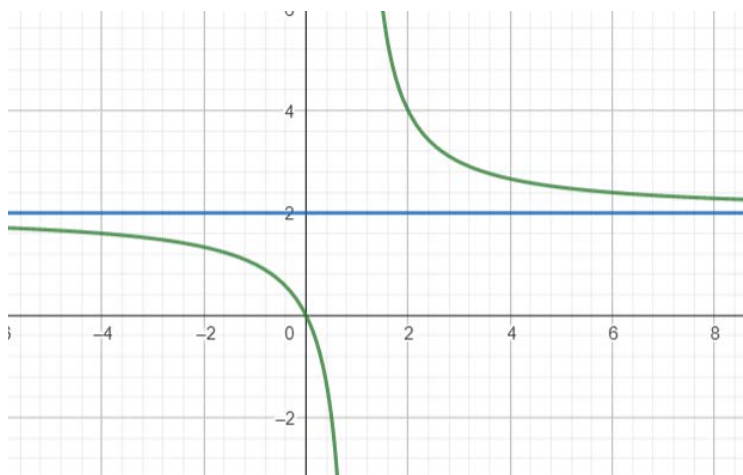
Αλλά

$$\left| 2 - \frac{2x}{x-1} \right| = \left| \frac{2x - 2(x-1)}{x-1} \right| = \left| \frac{-2}{x-1} \right| = \left| \frac{2}{x-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x-1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} + 1 > \frac{2}{\varepsilon},$$

οπότε εάν θεωρήσουμε $\frac{2}{\varepsilon} = \delta$, τότε εάν x τέτοιο ώστε: $x > \delta = \frac{2}{\varepsilon}$, τότε $\left| 2 - \frac{2x}{x-1} \right| < \varepsilon$

που είναι το ζητούμενο.



■

(2) Όριο της συνάρτησης στο άπειρο (άπειρο)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** το $+\infty$, για $x \rightarrow +\infty$ (του x τείνοντος **στο συν άπειρο**) και θα το συμβολίζουμε με:

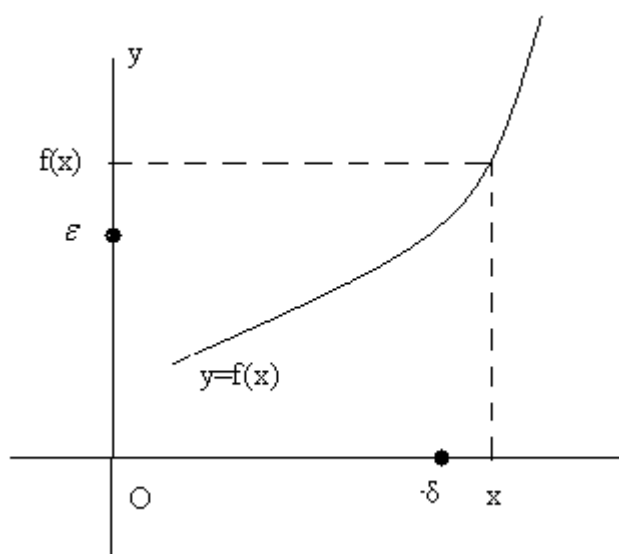
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

όταν για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν $x > \delta$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x γίνονται μεγάλα (μεγαλύτερα από ένα δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ γίνονται μεγάλες (μεγαλύτερες από ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 7)



Σχήμα 7

Ανάλογα ορίζονται και τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{5} = +\infty$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 2}{5}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

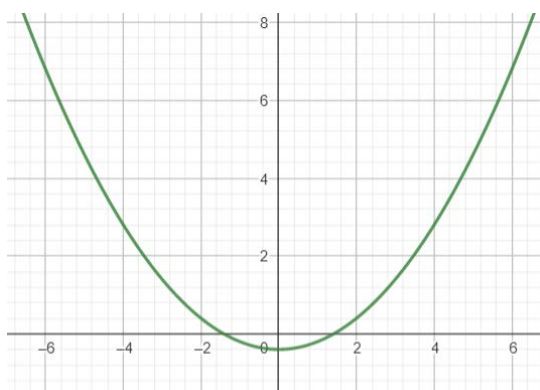
$$x > \delta$$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

$$\text{Αλλά } \frac{x^2 - 2}{5} > \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - 2 > 5\varepsilon \Leftrightarrow x > \sqrt{5\varepsilon + 2},$$

οπότε εάν θεωρήσουμε $\delta = \sqrt{5\varepsilon + 2}$, τότε εάν x τέτοιο ώστε: $x > \delta = \sqrt{5\varepsilon + 2}$, τότε $\frac{x^2 - 2}{5} > \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.



Μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις υπολογισμού του ορίου: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ εξετάζονται παρακάτω.

(I) Όριο πολωνυμικής

Πρόταση

Το όριο μιας πολωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, a_n \neq 0$ είναι ίσο με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της.

Απόδειξη

Πράγματι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \alpha_n x^n \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \frac{1}{x^n} \right) \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n) \cdot \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot 0 + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \cdot 0 + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \cdot 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n)\end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 3x - 1) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 1)$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 1) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

■

(II) Όριο ρητής συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή το

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ όπου } P(x), Q(x) \text{ είναι πολυώνυμα του } x, \text{ τότε χρησιμοποιούμε και πάλι}$$

την παραπάνω πρόταση. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι θα ισχύει:

1. Αν ο βαθμός $(P(x)) >$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \text{ (εξαρτάται από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων)}$$

2. Αν ο βαθμός $(P(x)) <$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

3. Αν ο βαθμός $(P(x)) =$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστούν τα όρια των συναρτήσεων.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 2}{3x^2 - 2}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 5x^2}{-x^5 + 6x}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{6 - 4x^3}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2}{x + 7}$$

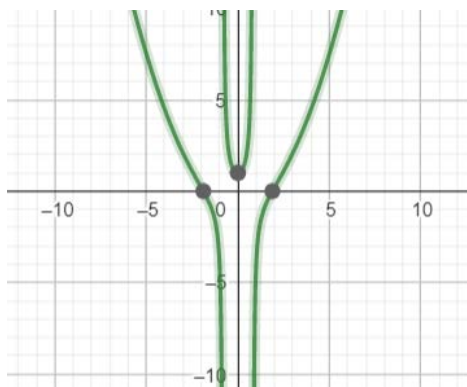
$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4x|}{x - 4}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{|x - 2|}$$

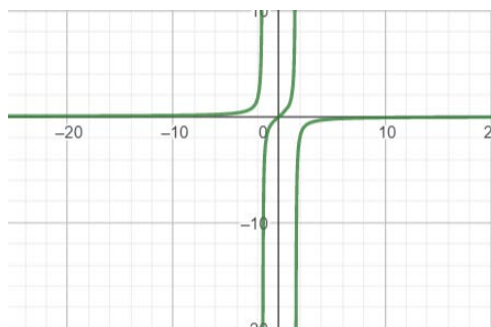
$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 2}$$

Λύση

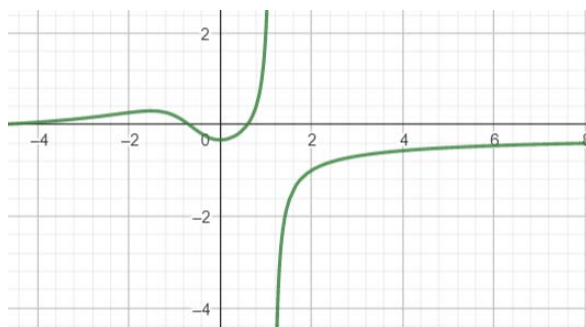
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 2}{3x^2 - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty$$



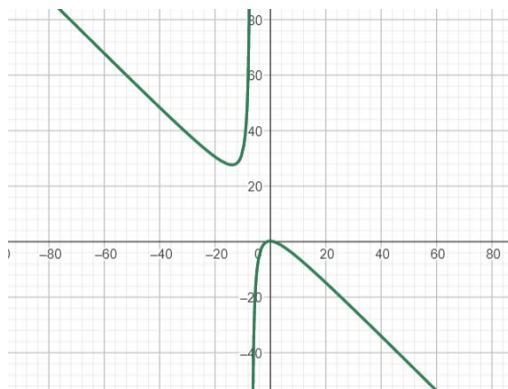
$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 5x^2}{-x^5 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$



$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{6 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-4x^3} = -\frac{1}{4}$$

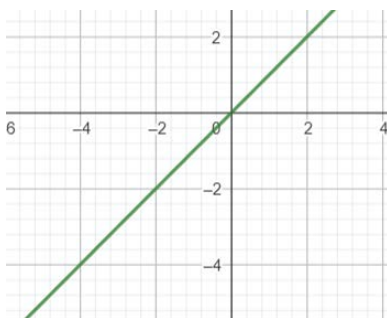


$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+2}{x+7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$$



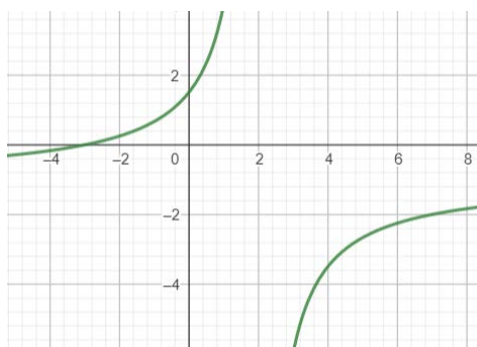
(ε) Όταν το $x \rightarrow +\infty$ η ποσότητα $x^2 - 4x = x(x-4) > 0$ (;), οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4x|}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

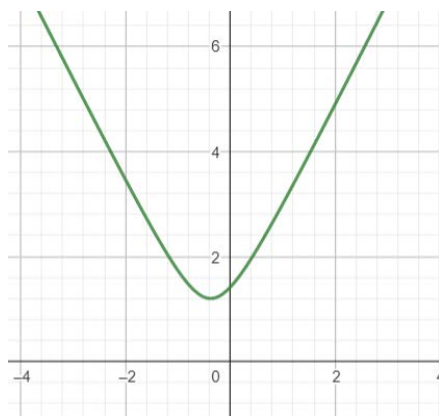


(στ) Όταν το $x \rightarrow -\infty$ η ποσότητα $(x-2) < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ (;), οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$



$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 3x + 2)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2)} = +\infty$$



■

(III) Όριο ριζικών

Εφαρμογή 5

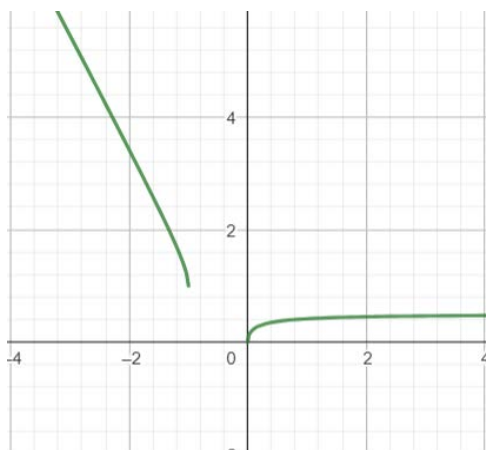
Για το όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



■