

4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(Α) Όριο συνάρτησης σε ένα σημείο x_0

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, όπου D ένα σύνολο της μορφής $D = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Ορισμός (κλασσικός ϵ, δ ορισμός)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \rightarrow x_0$ (**του x τείνοντος στο x_0**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

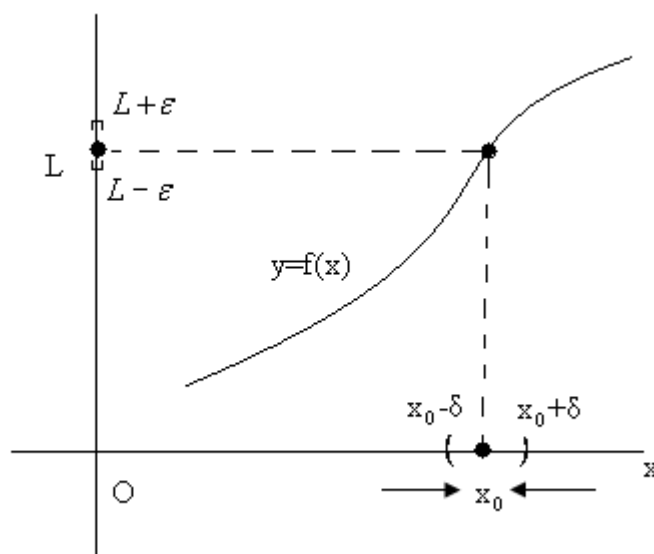
όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

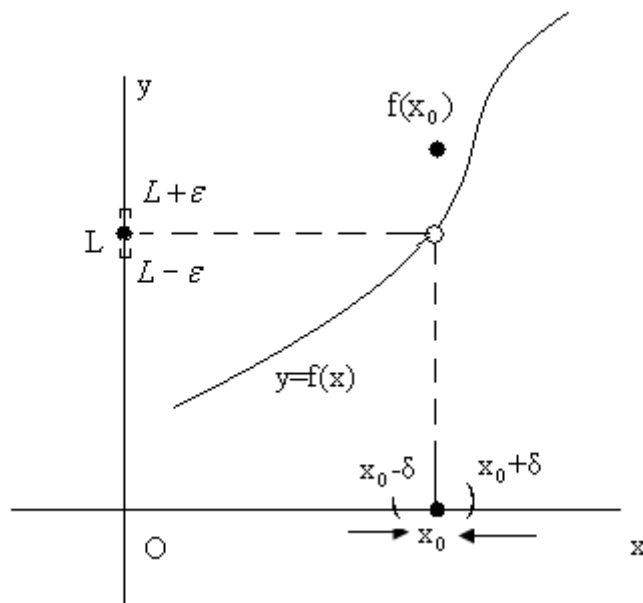
Δηλαδή όταν τα (πρότυπα) x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y = f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό L (σε απόσταση μικρότερη από ϵ , για κάθε δοσμένο ϵ). (δείτε το σχήμα 1)



Σχήμα 1

Παρατήρηση

(α) Είναι φανερό από τον ορισμό του ορίου ότι, η συνάρτηση f δεν είναι απαραίτητο να είναι ορισμένη στο σημείο x_0 . Ακόμα, αν η f είναι ορισμένη στο σημείο x_0 , τότε η τιμή $f(x_0)$ δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με το όριο L , δηλαδή $f(x_0) \neq L$ εν γένει (δείτε το σχήμα 2).



Σχήμα 2

(β) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μπορεί να υπάρχει ή μπορεί να μην υπάρχει. Όταν όμως υπάρχει είναι και μοναδικό.

(γ) Όταν το x πλησιάζει το σημείο x_0 από τιμές μικρότερες του x_0 δηλαδή $x < x_0$ (λέμε ότι το x **πλησιάζει το σημείο x_0 από αριστερά** και το συμβολίζουμε με $x \rightarrow x_0^-$), τότε το:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

καλείται **αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0** . Ανάλογα, όταν το x πλησιάζει το σημείο x_0 από τιμές μεγαλύτερες του x_0 δηλαδή $x > x_0$ (λέμε ότι το x **πλησιάζει το σημείο x_0 από δεξιά** και το συμβολίζουμε με $x \rightarrow x_0^+$), τότε το:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

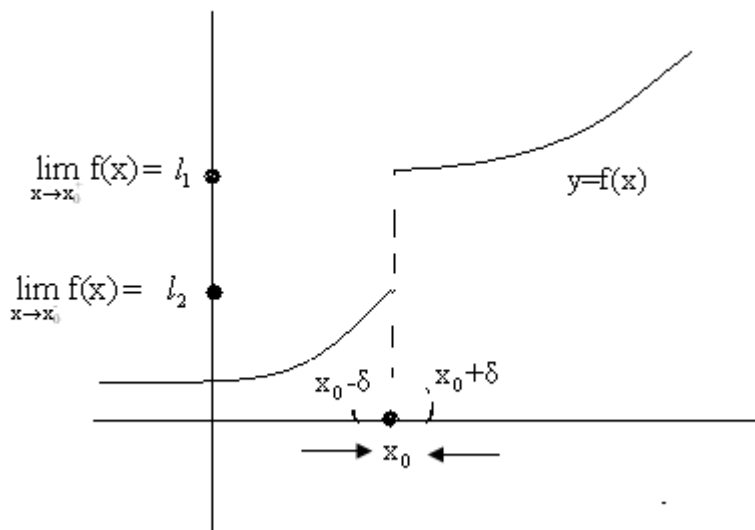
καλείται **δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0** .

Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν (δείτε το σχήμα 3).

(δ) Είναι προφανές ότι, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο σημείο x_0 είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε το σημείο x_0 .



Σχήμα 3

Ιδιότητες του ορίου

Εάν f, g, h είναι δύο συναρτήσεις των οποίων υπάρχει το όριο στο σημείο x_0 , τότε:

(α) $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

(β) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

(ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ Ειδικότερα $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$

(στ) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ όταν $f(x) \geq 0$

(ζ) (ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις/αρχή παρεμβολής) Εάν ισχύει:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

(η) Εάν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Δίνουμε πρώτα μερικές εφαρμογές υπολογισμού του ορίου με την βοήθεια του ε, δ , ορισμού.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1)$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1)=2$. Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ (το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση:
αν

$$|x-1| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |(3x-1)-2| < \varepsilon$$

Αλλά, $|(3x-1)-2| = |3x-3| = 3|x-1|$, οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, τότε:

$$|(3x-1)-2| = |3x-3| = 3|x-1| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ (το οποίο δ , και πάλι, πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση:

αν

$$|x| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |\sin x| < \varepsilon$$

Έχουμε όμως:

$$|\sin x| = |1 - \cos x| = 2 \left| \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right| = 2 \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} |x|^2$$

Συνεπώς, για $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ και έχουμε,

$$|\sin x| \leq \frac{1}{2} |x|^2 < \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

■

Εφαρμογή 3

Να δειχθεί ότι το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$)

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρξει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - a| < \delta, \quad \text{τότε} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$$

Έχουμε όμως: (έστω για ευκολία ότι το $a > 0$, αν $a < 0$ εργαζόμαστε ανάλογα).

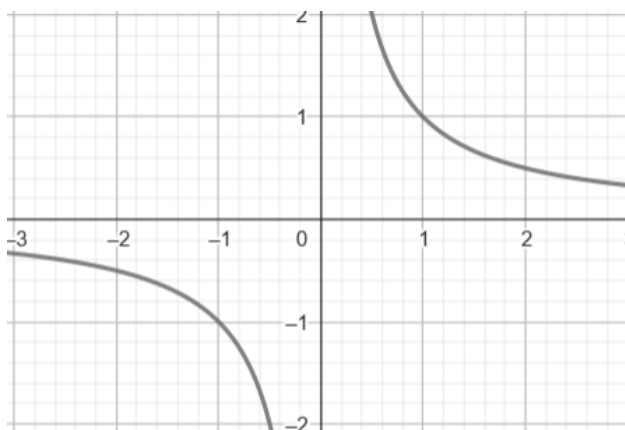
$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{x-a}{ax} \right|$$

$$\text{και} \quad x \rightarrow a \Rightarrow x > \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{2}{a} \Rightarrow \left| \frac{1}{ax} \right| < \frac{2}{a^2}$$

Συνεπώς, για $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{2}$ έχουμε,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{x-a}{ax} \right| < \delta \cdot \left| \frac{1}{ax} \right| < \frac{2}{a^2} \delta = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\varepsilon a^2}{2} = \varepsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).



■

Παρατήρηση

Από τις παραπάνω εφαρμογές γίνεται φανερό ότι ο ε, δ ορισμός για τον υπολογισμό του ορίου είναι δύσχρηστος για δύο κυρίως λόγους

- (α) Θα πρέπει να ξέρουμε, για να τον εφαρμόσουμε, το όριο L εκ των προτέρων (πράγμα που τις περισσότερες φορές δεν είναι εύκολο να το γνωρίζουμε).
- (β) Θα πρέπει για κάθε δοσμένο ε να υπολογίσουμε ένα δ έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο ανισότητες του ορισμού (πράγμα όχι εύκολο, τις περισσότερες φορές πρέπει να κάνουμε χρήση αρκετών πραγμάτων από την άλγεβρα για να το υπολογίσουμε).

- (γ) Για να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$ αρκεί να βρούμε μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ τέτοια ώστε $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ ενώ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq a$.

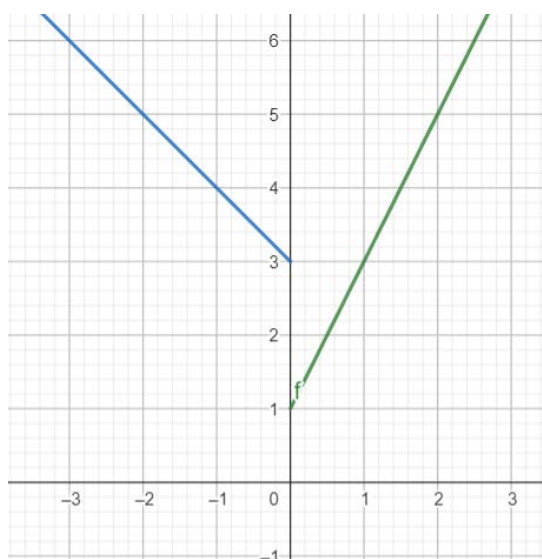
Παράδειγμα

Εάν $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ -x+3 & x < 0 \end{cases}$, τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq 1$

Λύση

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = -\frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{αλλά} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\left(-\frac{1}{n}\right) + 3\right) = 3 \neq 1$$



■

- (δ) Για να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ τέτοιες ώστε $x_n \neq x_0, y_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ ενώ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$.

Παράδειγμα

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει.

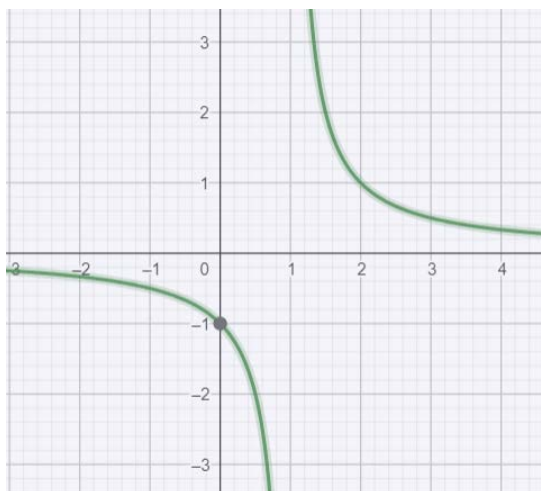
Λύση

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $x_n = 1 + \frac{1}{n}, y_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$, τότε

ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ αλλά:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \neq$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$



■

Όταν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν χρησιμοποιούμε (κατ' αρχάς) τον ε,δ ορισμό, **αλλά** προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα ακόλουθα:

- 1) Αντικαθιστούμε το x με x_0 στον τύπο της $f(x)$. Εάν το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ένας πεπερασμένος αριθμός A , τότε:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

(βέβαια για να είμαστε μαθηματικά σωστοί και αυστηροί, θα πρέπει να αποδείξουμε (με την βοήθεια του ε,δ ορισμού) ότι όντως το όριο που βρήκαμε είναι το «σωστό», πράγμα το οποίο τις περισσότερες φορές παραλείπεται).

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 3x - 1) & (\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4} & (\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4|}{x+4} \\ (\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x + 6} & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 4)^{15} & (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \end{array}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 3x - 1) = 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = 44 \quad (\text{αναμενόταν γιατί η συνάρτηση είναι πολυωνυμική})$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4} = \frac{2-2}{2^2+4} = \frac{0}{8} = 0$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4|}{x+4} = \frac{|2-4|}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+5x+6)} = \sqrt{1^2+5 \cdot 1+6} = \sqrt{12} = 3\sqrt{2}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2-3x+4)^{15} = \left(\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-3x+4) \right)^{15} = (3^2-3 \cdot 3+4)^{15} = 4^{15}$$

(στ)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

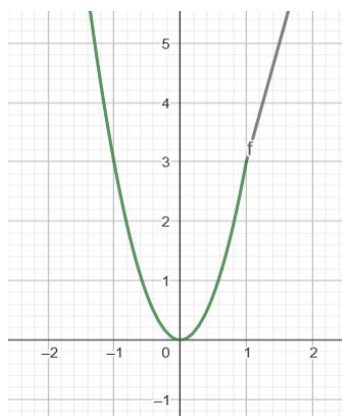
Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί, εάν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ της:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 1 \\ 4x-1 & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \cdot 1^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$



■

Εφαρμογή 6

Εάν για τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha x + 1 & x \leq 2 \\ \frac{\beta^2 x^2 - 4}{\beta x + 2} & x > 2 \end{cases}$$

έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, να υπολογιστούν τα α και β .

Λύση

Επειδή:

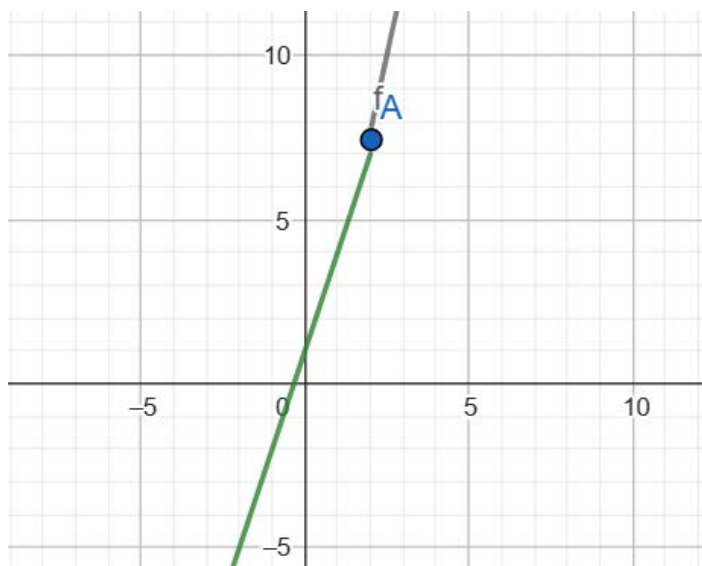
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$$

$$\text{Αλλά: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (3\alpha x + 1) = 3\alpha \cdot 2 + 1 = 7 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\beta^2 x^2 - 4}{\beta x + 2} \right) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\beta x)^2 - 2^2}{\beta x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\beta x - 2)(\beta x + 2)}{\beta x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x - 2) = (\beta \cdot 2 - 2) = 7 \Rightarrow 2\beta = 9 \Rightarrow \beta = \frac{9}{2}$$



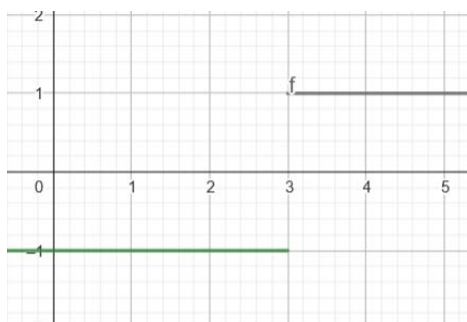
■

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί, εάν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ της: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{|x-3|}$.

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x-3|} \stackrel{x>3}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{|x-3|} \stackrel{x<3}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$



■

Εφαρμογή 8

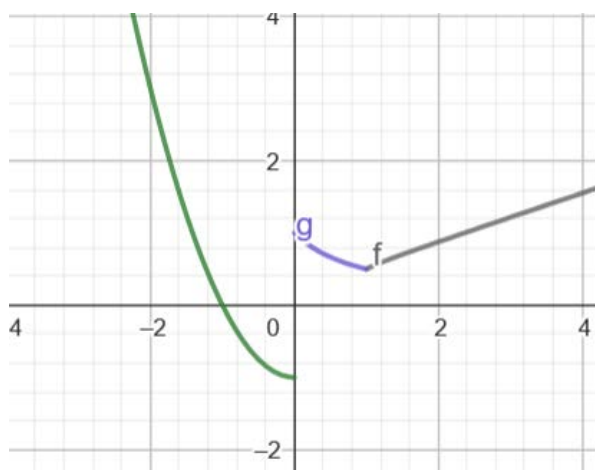
Να υπολογιστούν, εάν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ της:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x^2-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{2x^2-1}{6x-4} & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

Για το σημείο 0 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-1} &= \frac{0-1}{0^2-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



Για το σημείο 1 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2-1}{6x-4} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1}{6 \cdot 1 - 4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

■

Εφαρμογή 9

Εάν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{5x} = 4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Εάν θέσουμε $g(x) = \frac{f(x)+3}{5x}$ τότε: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$. Ακόμα: $f(x) = 5x \cdot g(x) - 3$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x \cdot g(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)) - 3 = 5 \cdot 0 \cdot 4 - 3 = -3$$

■

- 2) (α) Προσπαθούμε να κάνουμε κάποιο είδος παραγοντοποίησης στον τύπο της συνάρτησης ή να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις γνωστές ταυτότητες.

Εφαρμογή 10

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x-1} \quad (δ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{1-\sigma \upsilon \nu x}$$

Λύση

Έχουμε

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$$

(δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sigma\upsilon\nu x) \\ = 1 + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

■

(β) Εάν η συνάρτηση είναι ρητή (κλάσμα) και περιέχει ριζικά, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση (αριθμητή ή παρονομαστή, ανάλογα με το που υπάρχουν τα ριζικά).

Εφαρμογή 11

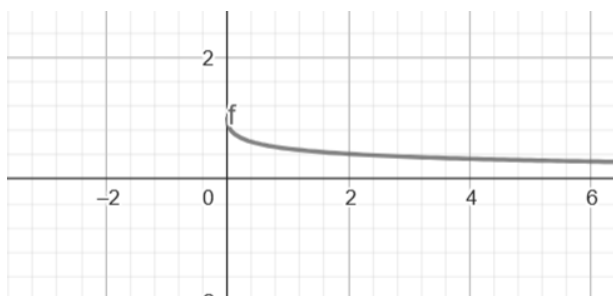
Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, καθένα από τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$$

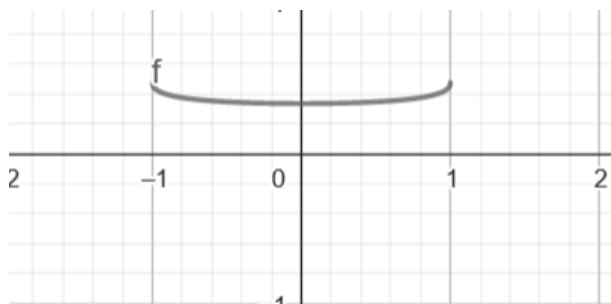
Λύση

(α) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την συζυγή παράσταση του αριθμητή:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$



(β) Ανάλογα, έχουμε:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}^2 - \sqrt{1-x}^2}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

■

3) Χρησιμοποιούμε το θεώρημα των λεγόμενων ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ή αλλιώς την αρχή της παρεμβολής

Πρόταση (θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων/αρχή της παρεμβολής)

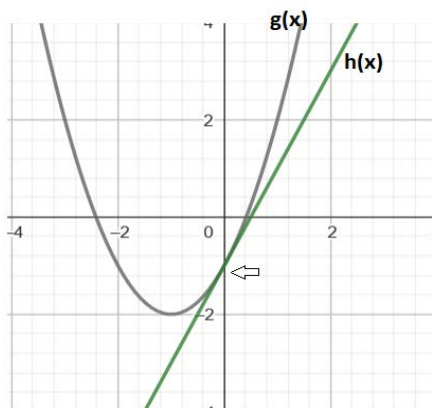
Εάν f, g, h πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \beta = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Εφαρμογή 12

Εάν ισχύει: $(2x-1) \leq f(x) \leq (2x-1)+x^2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση



Εάν θέσουμε: $h(x)=2x-1$, $g(x)=(2x-1)+x^2$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x-1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((2x-1)+x^2) = 2 \cdot 0 - 1 + 0^2 = -1$$

Οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων/αρχή παρεμβολής

έπεται και ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

■

4) Γενικότερα, χρησιμοποιούμε γνωστά θεωρήματα από την άλγεβρα.

Π.χ Είναι γνωστό από την άλγεβρα ότι:

Πρόταση

$$|\eta\mu x| \leq |x| \leq |\epsilon\phi x|, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Εφαρμογή 13

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, καθένα από τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x} \quad (δ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\eta\mu x}$$

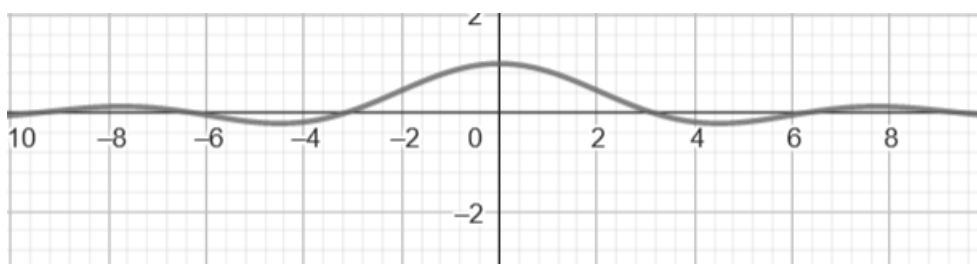
Λύση

(α) Από την παραπάνω πρόταση, έχουμε για:

$$\begin{aligned} x \neq 0, \quad |\eta\mu x| \leq |x| &\leq \frac{|\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} \xrightarrow{\text{αντιστρεφοντας}} \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|\eta\mu x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\eta\mu x|} \\ &\xrightarrow{\text{πολλ/ζοντας με } |\eta\mu x|} |\eta\mu x| \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|\eta\mu x|} \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{|\eta\mu x|}{|\eta\mu x|} \\ &\Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x| \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων, έχουμε:

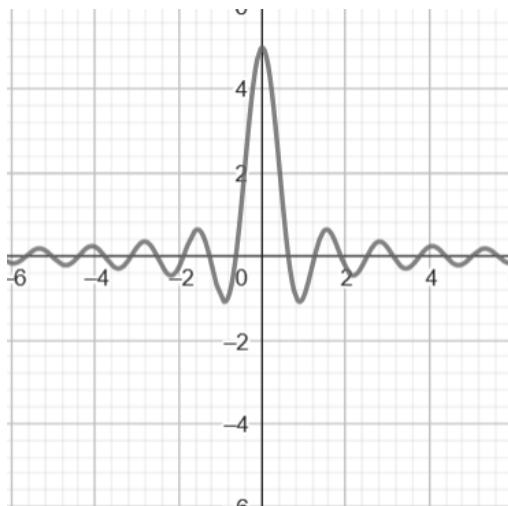
$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sigma\upsilon\nu x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$



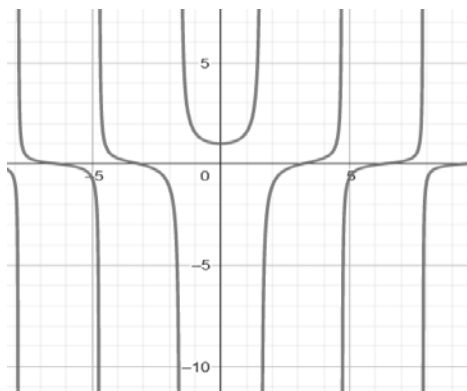
Παρατήρηση

Το ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ είναι βασικό και μας βοηθά να υπολογίσουμε όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$(β) \text{ Χρησιμοποιώντας το (α): } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} \frac{1}{5} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} \stackrel{(α)}{=} 1$$

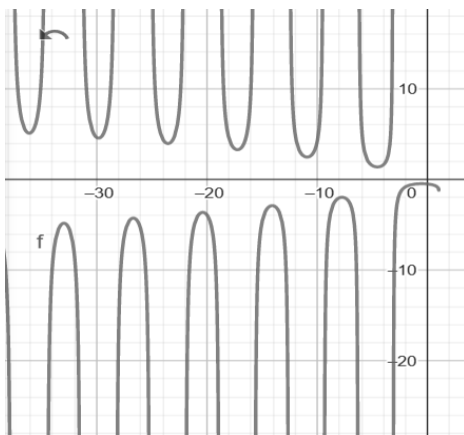


$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x \cdot \sigma \upsilon \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \stackrel{(a)}{=} 1 \cdot \frac{1}{\sigma \upsilon \nu 0} = 1$$



(δ)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\eta \mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{1-x}-1}{x \cdot \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x \cdot \frac{\eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}} \stackrel{(a)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x \cdot (\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x \cdot (\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{1-x}+1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



■

Εφαρμογή 14

Να δείχθει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$.

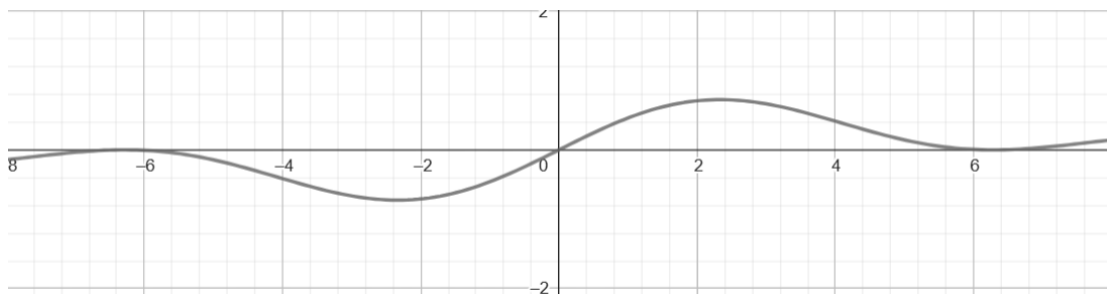
Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 1}{x(\sin x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{x(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{x \cdot x(\sin x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x + 1} = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$



■