

3. ΣΕΙΡΕΣ

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια (γνωστή δοθείσα) ακολουθία, τότε σχηματίζουμε μια καινούργια ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}s_1 &= \alpha_1 \\ s_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ s_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n\end{aligned}$$

Η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ονομάζεται **σειρά** με γενικό όρο την α_n . Και πάλι μας ενδιαφέρει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. Το όριο αυτό, στην περίπτωση που υπάρχει, καλείται **άθροισμα** της σειράς και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Εάν το όριο αυτό υπάρχει (και είναι ένας πεπερασμένος αριθμός) τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** αλλιώς η σειρά **αποκλίνει**.

Παρατήρηση

Είναι αρκετά δύσκολο τις περισσότερες φορές να υπολογίσει κανείς το άθροισμα μιας σειράς (αφού είναι δύσκολο να υπολογίσει τον όρο s_n σαν συνάρτηση του n , και να χρησιμοποιήσει γνωστές προτάσεις ή περιπτώσεις από τις ακολουθίες). Γι αυτό τις περισσότερες φορές μας αρκεί να ξέρουμε αν μια σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αυτό επιτυγχάνεται με την βοήθεια προτάσεων τα οποία καλούνται κριτήρια σύγκλισης. Τα σπουδαιότερα από αυτά τα κριτήρια παρουσιάζονται παρακάτω.

Κριτήρια Σύγκλισης

(α) Κριτήριο του $n^{\text{ου}}$ όρου

$$\text{Αν } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{συγκλίνει} \Rightarrow \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Αν } \alpha_n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{αποκλίνει}$$

Παρατήρηση

Προσοχή, εάν $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{συγκλίνει}$ (π.χ η **αρμονική** σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ μπορεί να δειχθεί ότι αποκλίνει αν και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$).

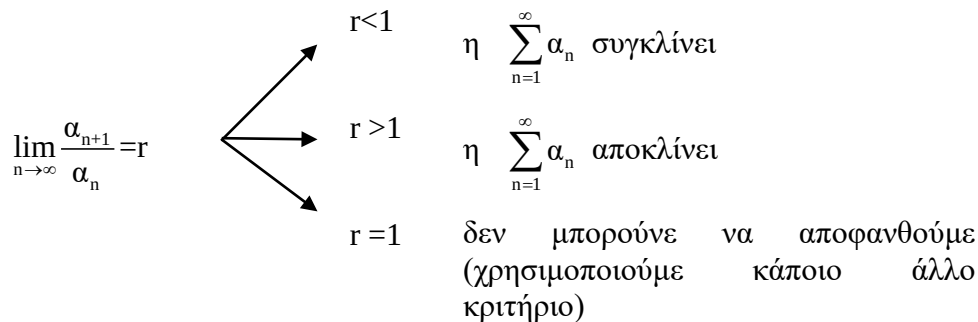
(β) Κριτήριο Σύγκρισης

Αν $\alpha_n, \beta_n \geq 0 \ \forall n$ και $\alpha_n \leq \beta_n$ για $n \in \mathbb{N}$

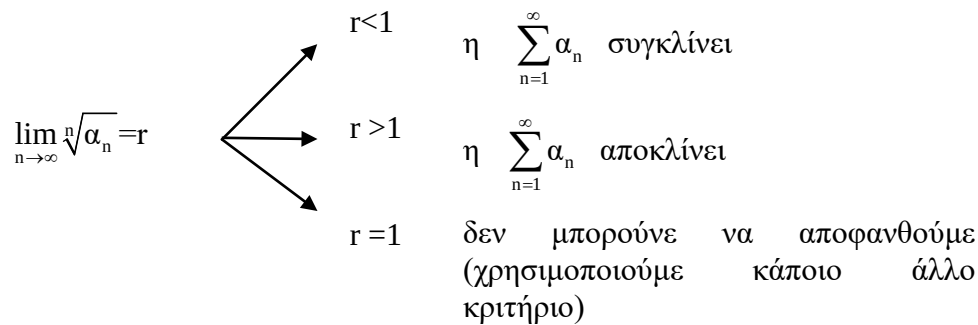
i) αν $\sum \beta_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ και $\sum \alpha_n$ συγκλίνει

ii) αν $\sum \alpha_n$ αποκλίνει $\Rightarrow$ και $\sum \beta_n$ αποκλίνει

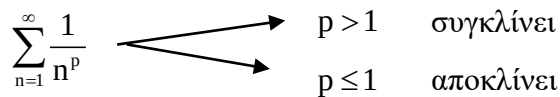
(γ) Κριτήριο του λόγου (ή κριτήριο d' Alembert)



(δ) Κριτήριο της ρίζας (ή κριτήριο του Cauchy)



(ε) Ρ- σειρά



(στ) Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \right)$$

(ζ) Κριτήριο – Οριακό Κριτήριο σύγκρισης

Αν $\sum_1^\infty \alpha_n$, $\sum_1^\infty \beta_n$ είναι σειρές με θετικούς όρους και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \ell$ $0 < \ell < \infty$ τότε

$$\text{i) } \sum \beta_n \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \sum \alpha_n \text{ συγκλίνει}$$

$$\text{ii) } \sum \beta_n = +\infty \Leftrightarrow \sum \alpha_n = +\infty$$

Εφαρμογή 1

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση κάθε μία από τις παρακάτω σειρές.

$$(\alpha) \sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1}$$

$$(\beta) \sum_1^\infty \frac{3^n}{n!}$$

$$(\gamma) \sum_1^\infty \frac{n^n}{n!}$$

$$(\delta) \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n \quad \alpha > 0$$

$$(\epsilon) \sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4+1}$$

$$(\sigma\tau) \sum_1^\infty \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}}$$

Λύση

$$(\alpha) \sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1} \quad \text{Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του } n^{\text{ου}} \text{ όρου}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1} = \text{αποκλίνει}$$

$$(\beta) \sum_1^\infty \frac{3^n}{n!} \quad \text{Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου όπου } \alpha_n = \frac{3^n}{n!}$$

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε γινόμενα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n} = \frac{3^{n+1} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot 3^n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$$\text{Άρα η } \sum_1^\infty \frac{3^n}{n!} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(\gamma) \sum_1^\infty \frac{n^n}{n!} \quad \text{Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου όπου } \alpha_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)! n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e > 1$$

$$\text{Άρα η } \sum_1^\infty \frac{n^n}{n!} \text{ αποκλίνει}$$

Παρατήρηση Είναι γνωστό ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

(δ) $\sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n$ $\alpha > 0$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε **n^οστες δυνάμεις**

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n} = 1 + \frac{1}{\alpha} > 1$$

Άρα η $\sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n$ $\alpha > 0$ αποκλίνει

(ε) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4 + 1}$

Αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του $n^{\text{ο$ στου} όρου παρατηρούμε ότι δεν «δουλεύει», γιατί:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} = 0$$

Δεν “δουλεύει” ακόμα και το κριτήριο του λόγου ($\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$;))

Παρατήρηση Σε πηλίκο πολυωνύμων κάνουμε χρήση (όταν είναι δυνατόν) του κριτηρίου σύγκρισης:

$$n^4 < n^4 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n^4 + 1} < \frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{n^2}{n^4 + 1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

Η σειρά $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ = p-σειρά, $p = 2 > 1$ άρα συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4 + 1}$ (από το κριτήριο σύγκρισης).

(στ) $\sum_1^\infty \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}} = \sum_1^\infty \frac{4^n \cdot 4^2}{7^n \cdot 7} = \frac{4^2}{7} \sum_1^\infty \frac{4^n}{7^n} = \frac{16}{7} \sum_1^\infty \left(\frac{4}{7}\right)^n$ **(ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ)**

Παρατήρηση

Η σειρά $\sum_1^\infty r^n$ καλείται **γεωμετρική σειρά**. Εάν $|r| < 1$ η σειρά συγκλίνει (αν $|r| \geq 1$ η σειρά αποκλίνει). Στη γεωμετρική σειρά ξέρουμε και πόσο είναι το **άθροισμα** της:

$$\sum_{n=1}^\infty r^n = \frac{r}{1-r} \quad \text{ή} \quad \text{γενικότερα} \quad \sum_{n=k}^\infty r^n = \frac{r^k}{1-r}$$

$$\text{Επομένως } \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}} = \sum_1^{\infty} \frac{4^n \cdot 4^2}{7^n \cdot 7} = \frac{16}{7} \cdot \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{16}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{21}$$

■

Εφαρμογή 2

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση κάθε μία από τις παρακάτω σειρές.

$$(\alpha) \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2}$$

$$(\beta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}$$

$$(\gamma) \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$(\delta) \sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$(\epsilon) \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$$

(

Λύση

$$(\alpha) \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2} \quad \left(\frac{n}{3n^3+2} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \right). \quad \text{Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με:}$$

$$\alpha_n = \frac{n}{3n^3+2}, \beta_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{3n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3+2} = \frac{1}{3} \quad \text{και επειδή η σειρά}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2}.$$

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε πηλίκο πολυωνύμων του n (το κριτήριο του λόγου αποτυγχάνει)

$$(\beta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \right). \quad \text{Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης}$$

$$\text{με: } \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}, \beta_n = \frac{1}{n} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+5}} = 1$$

$$\text{και επειδή η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}.$$

$$(\gamma) \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \quad \text{Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της } n^{\text{οστης}} \text{ ρίζας}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Άρα η $\sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει

(δ) $\sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της $n^{\text{οστης}}$ ρίζας

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} < 1$$

Άρα η $\sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ συγκλίνει

(ε) $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$ ($\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3} \approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$). Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με:

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}, \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3} = 1 \text{ και επειδή η}$$

σειρά $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$.

■

Εφαρμογή 3

Για να κατασκευαστεί ένας θάλαμος φύλαξης ραδιενεργών αποβλήτων χρησιμοποιείται ένα συμπαγές περίβλημα. Υπολογίζεται πειραματικά ότι στο τέλος κάθε χρόνου η ραδιενέργεια διαπερνά το περίβλημα κατά ένα πάχος:

$$d = \frac{P}{n}$$

όπου n είναι ο αριθμός των χρόνων που έχει περάσει και P μια θετική σταθερά. Γνωρίζουμε ότι στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι $d=0,5\text{cm}$

(α) Αν το περίβλημα έχει αρχικά πάχος 4m, θα μπορέσει ποτέ η ραδιενέργεια να το διαπεράσει;

(β) Να βρεθεί ένα ασφαλές πάχος για το περίβλημα, ώστε να μην το διαπεράσει η ραδιενέργεια τα επόμενα 1000 χρόνια.

Λύση

Αφού για $n=1$, $d=0,5$ θα έχουμε ότι $P=0,5$. Επομένως το πάχος του περιβλήματος που θα έχει διαπεραστεί μετά από n χρόνια θα είναι :

$$d = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3} + \dots + \frac{P}{n} = P \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(α) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, οπότε όταν $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $d \rightarrow \infty$. Επομένως

όποια και αν είναι η τιμή της θετικής σταθεράς P , η ραδιενέργεια θα διαπεράσει το περίβλημα.

(β) Μετά από 1000 χρόνια η ραδιενέργεια θα έχει διαπεράσει πάχος ίσο με :

$$d = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3} + \dots + \frac{P}{1000} < 1000 \cdot P$$

Αρκεί να θεωρήσουμε ότι το πάχος του περιβλήματος είναι $1000d = 500\text{cm} = 5\text{m}$.

■

Εφαρμογή 4

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \alpha^n$

για τις διάφορες τιμές της θετικής παραμέτρου α .

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Λύση

(α) Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ρίζας, οπότε έχουμε :

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \alpha^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha$$

και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha$. Αν $\alpha < 1$ η σειρά συγκλίνει, αν $\alpha > 1$ η σειρά δε συγκλίνει, ενώ αν $\alpha = 1$

θα πρέπει να εξετάσουμε ξεχωριστά τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Γνωρίζουμε ότι για μία συγκλίνουσα σειρά με όρους α_n ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. Όμως οι

όροι $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ έχουν όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$ (Παράδειγμα, σελ. 24).

Επομένως η σειρά αποκλίνει (κριτήριο του $n^{\text{ου}}$ όρου).

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου, οπότε έχουμε :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2}{e} < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 5

(α) Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$ δεν συγκλίνει.

(β) Να δείξετε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$. (ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΚΗ ΣΕΙΡΑ)

Λύση

(α) Ισχύει $\frac{\sin n}{n} < 1$, $n = 1, 2, \dots$, οπότε έχουμε:

$$n^2 + \frac{\sin n}{n} < n^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}} < \sqrt{n^2 + 1} < \sqrt{n^2 + n^2} < 2n, \quad n = 1, 2, \dots$$

και επομένως:

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ όμως δεν συγκλίνει ως **αρμονική**, και επομένως η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$ δεν συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης.

. (β) Έχουμε (με ανάλυση του γινομένου σε απλά κλάσματα):

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} = \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Θέτουμε: } \alpha_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Άρα:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

.....

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}$$

Οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική, με:

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}$$

Άρα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1}$

Αλλά, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) = 0$ οπότε: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

■

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 9} \text{ (τηλεσκοπική)}$$

Λύση

(α). Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{12^n} + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{12} \right)^n$$

Η γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{5}{12}$ συγκλίνει στο: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{12}{7}$

ενώ η γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ στο: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$.

Έτσι, η αρχική σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{12} \right)^n = 2 \cdot \frac{12}{7} + 7 \cdot 2 = \frac{122}{7}.$$

(β) Με ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχουμε

$$\frac{1}{36n^2 - 9} = \frac{1}{(6n)^2 - 3^2} = \frac{1}{(6n-3)(6n+3)} = \frac{A}{6n-3} + \frac{B}{6n+3} = \frac{A(6n+3) + B(6n-3)}{(6n-3)(6n+3)}$$

ή $A(6n+3) + B(6n-3) = 1, \quad n = 1, 2, \dots$

Αν θέσουμε όπου $n = \frac{1}{2}$ τότε $6 \cdot A = 1$ άρα $A = \frac{1}{6}$, ενώ αν θέσουμε όπου $n = -\frac{1}{2}$, τότε

$(-6)B = 1$ άρα $B = -\frac{1}{6}$.

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 9} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right),$

Θέτουμε: $\alpha_n = \frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)}$, $n=1,2,\dots$ Άρα:

$$\alpha_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right)$$

.....

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right)$$

Οπότε:

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6(6n+3)}$$

Συνεπώς η σειρά είναι τηλεσκοπική.

$$\text{Άρα: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-9} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{18} - \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n+3}$$

$$\text{Αλλά, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n+3} = 0 \text{ οπότε: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-9} = \frac{1}{18}$$

■

Εφαρμογή 7

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n}$$

Λύση

α) Θέτουμε $\alpha_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ και παρατηρούμε ότι $\alpha_n > 0$, $n=1,2,\dots$

Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{[n!(n+1)]^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου (βλ. σελ. 37).

$$(\beta) \text{ Θέτουμε } \alpha_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ τότε: } (\alpha_n)^{1/n} = \left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n}$$

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

$$(\text{γιατί } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} = 1)$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας (βλ. σελ. 39).

■

Εφαρμογή 8

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(ΕΝΑΛΛΑΣΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Λύση

$$(\alpha) \text{ Αφού } |n-2| \leq |n| + |2|, \text{ έχουμε ότι: } \left| (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \right| \leq \frac{n+2}{n^3+1}, n=1, 2, \dots$$

$$\text{Επειδή } n+2 \leq 3n \text{ και } n^3+1 > n^3 \text{ έχουμε ότι: } \left| (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \right| \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}, n=1, 2, \dots$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης συνάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}$ συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει (δείτε παρακάτω).

(β) Η ακολουθία $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλίνει στο μηδέν, διότι δεν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (οι υπακολουθίες των θετικών και των αρνητικών όρων συγκλίνουν στο +1 και -1 αντίστοιχα). Άρα σύμφωνα με το κριτήριο n^οστού όρου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει.

■

Εναλλάσσουσες σειρές

Ορισμός

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ καλείται **εναλλάσσουσα**, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι:

$$\beta_n \beta_{n+1} < 0,$$

δηλαδή, αν δύο οποιοδήποτε διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ετερόσημοι (έχουν δηλαδή διαφορετικό πρόσημο ή με άλλα λόγια «εναλλάσσουν» πρόσημο).

Εφαρμογή 9

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (αρμονική εναλλάσσουσα), $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n^2+1}$ είναι εναλλάσσουσες.

Γενικότερα, **εναλλάσσουσα** είναι κάθε σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n, \quad \text{με } \alpha_n > 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Το κριτήριο που ακολουθεί είναι συνήθως αυτό που χρησιμοποιείται για απόδειξη της σύγκλισης (ή όχι) μιας εναλλάσσουσας σειράς.

Θεώρημα (Κριτήριο Leibnitz).

Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ (ή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$) είναι μια εναλλάσσουσα σειρά (υποθέτουμε ότι $\alpha_n > 0$), και ισχύει:

- (i) η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (δηλαδή ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$),
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$,

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ (ή η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$) συγκλίνει.

Εφαρμογή 10

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο, γιατί:

- (i) $\alpha_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = \alpha_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, και
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

■

Παρατήρηση

(α) Θυμηθείτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (αρμονική) δεν συγκλίνει.

(β) Γενικότερα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ συγκλίνει (χρησιμοποιώντας και πάλι το κριτήριο του Leibnitz, γιατί για την ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n^p}$ έχουμε:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} = \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{και} \quad (\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0).$$

■

Εφαρμογή 11

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$ είναι εναλλάσσουσα και (εδώ $\alpha_n = \frac{1}{3n+2}$):

- (i)

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{3(n+1)+2} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+2} = \frac{3n+2-(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{-3}{(3n+5)(3n+2)} < 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n+2} = 0$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$ συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 12

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+2}$ είναι εναλλάσσουσα και:

(i)

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \frac{(n+1)+3}{(n+1)^2+2} - \frac{n+3}{n^2+2} = \frac{n+4}{n^2+2n+3} - \frac{n+3}{n^2+2} = \frac{(n^2+2)(n+4) - (n+3)(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \\ &= \frac{n^3+4n^2+2n+8-n^3-2n^2-3n-3n^2-6n-9}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{-n^2-7n-1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = -\frac{n^2+7n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^2+2} = 0$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+2}$ συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 13

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{2n+1}$ είναι εναλλάσσουσα. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε όμως για την σύγκλιση της χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz, γιατί δεν ικανοποιείται η συνθήκη (ii). Εδώ:

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

■

Παρατήρηση

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \neq 0$ (στην πραγματικότητα δεν υπάρχει (γιατί;)), έχουμε από το

κριτήριο του n-οστού όρου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{2n+1}$ δεν συγκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Όταν έχουμε μια εναλλάσσουσα σειρά, πριν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Leibnitz προσπαθούμε να δούμε εάν, όπως λέμε, η σειρά **συγκλίνει απόλυτα**.

Ορισμός

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει **απόλυτα**, εάν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ (δηλαδή εάν συγκλίνει η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της σειράς).

Κριτήριο (απόλυτης σύγκλισης)

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ (ή με άλλα λόγια, εάν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει) και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$$

Εφαρμογή 14

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ συγκλίνει απόλυτα γιατί είναι γνωστό ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ συγκλίνει. Άρα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης, και η (εναλλάσσουσα) σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ (δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε δηλαδή απαραίτητα το κριτήριο του Leibnitz).

■

Παρατήρηση

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ αποκλίνει, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή όχι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Εφαρμογή 15

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$ **δεν** συγκλίνει απόλυτα γιατί είναι γνωστό ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ αποκλίνει.

Δείξαμε όμως στο παράδειγμα 2 (χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$ συγκλίνει.

■