

2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών καλείται (πραγματική) **ακολουθία**, δηλαδή $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (π.χ. $f(n)=n^2$ δηλαδή η 1, 4, 9, 16, 25, ...).

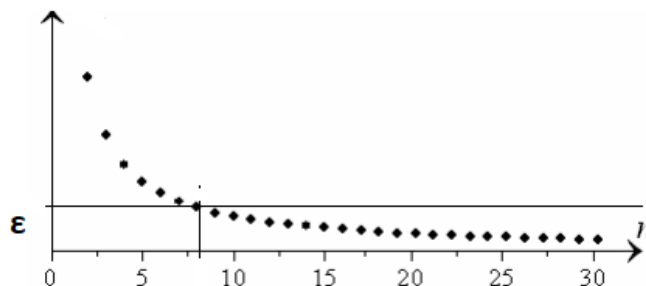
Η τιμή $f(n)$ συμβολίζεται συνήθως με a_n δηλαδή $a_n = f(n)$ (με άλλα λόγια ο υποδείκτης του a_n παριστάνει την τιμή του n , του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την εικόνα).

Έτσι εάν $a_n = f(n) = n^2$, τότε $a_1 = f(1) = 1^2 = 1$, $a_2 = f(2) = 2^2 = 4, \dots$

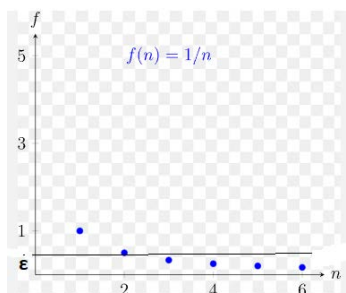
Μια ακολουθία παριστάνεται συνήθως σαν $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Αν λοιπόν $a_n = f(n) = n^2$, τότε την παριστάνουμε και σαν $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$.

Αν δίνεται μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ θα θέλαμε να ξέρουμε αν, καθώς το n αυξάνει, οι όροι (τιμές) της ακολουθίας πλησιάζουν έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό a , τον οποίο θα καλούμε **όριο** της ακολουθίας (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$). Είναι φανερό ότι το όριο μιας ακολουθίας μπορεί να μην υπάρχει. Στην περίπτωση που το όριο της ακολουθίας υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός) λέμε ότι η ακολουθία **συγκλίνει** αλλιώς **αποκλίνει**.

Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **μηδενική** ή το **όριό** της, καθώς το $n \rightarrow +\infty$, είναι το **μηδέν** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$), εάν πάρουμε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$ (τυχόν), τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$.



Π.χ. η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μηδενική (ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$) γιατί εάν πάρουμε το διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (πράγματι αρκεί $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$, δηλαδή εάν $\varepsilon = \frac{1}{10}$ τότε οι όροι a_n με $n > 10$ βρίσκονται στο διάστημα $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$).



Γενικότερα, λέμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** , ή **το όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι **το a** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$), εάν πάρουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα αυτό.

Ισοδύναμα, η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** εάν και μόνον εάν η ακολουθία $\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ όπου $\beta_n = a_n - a$ είναι μηδενική.

Π.χ. η ακολουθία $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ έχει όριο το 1, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Παρατήρηση 1

Υπάρχει ένας αυστηρά μαθηματικός ορισμός του ορίου μια ακολουθίας ο οποίος δίνεται παρακάτω, είναι όμως δύσκολος στη χρήση του.

Ορισμός 2

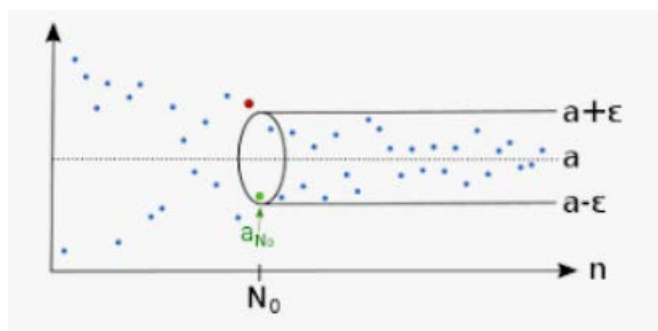
Λέμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** , ή **το όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι **το a** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$), εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι a_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, πλησιάζουν τον αριθμό a (βρίσκονται δηλαδή σε απόσταση μικρότερη από ε , για το δοσμένο ε).



Εφαρμογή 1

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $p > 0$

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$|\alpha_n - \alpha| = \left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| < \varepsilon$$

Αλλά

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^p \Leftrightarrow n > \sqrt[p]{\varepsilon}$$

οπότε εάν θεωρήσουμε σαν $n_0 > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$ (αποδεικνύεται ότι υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός

από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών), τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Εφαρμογή 2

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, ($n \geq 2$)

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

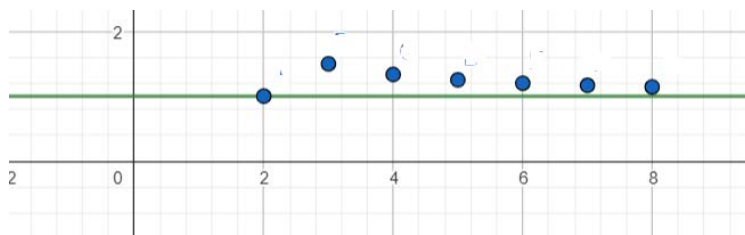
$$|\alpha_n - \alpha| = \left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Αλλά:

$$\left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| = \left| \frac{n-n+1}{n-1} \right| = \left| \frac{1}{n-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n-1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ (αποδεικνύεται και πάλι, από τις ιδιότητες των

πραγματικών αριθμών, ότι υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός), τότε έχουμε το ζητούμενο.



Εφαρμογή 3

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ (δηλ. η $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$) δεν συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ συγκλίνει σ' έναν αριθμό α και έστω $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Τότε θα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$, $|\alpha_n - \alpha| = |(-1)^n - \alpha| < \frac{1}{4}$.

Αλλά τότε: (I) για $n \geq n_0$ άρτιο έχουμε: $|\alpha_{2n} - \alpha| = |(-1)^{2n} - \alpha| = |1 - \alpha| < \frac{1}{4}$

(II) για $n \geq n_0$ περιττό έχουμε: $|\alpha_{2n+1} - \alpha| = |(-1)^{2n+1} - \alpha| = |-1 - \alpha| = |1 + \alpha| < \frac{1}{4}$

Τώρα:

$$2 = 1 - \alpha + 1 + \alpha = |1 - \alpha + 1 + \alpha| \leq |1 - \alpha| + |1 + \alpha| \stackrel{\text{I, II}}{<} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

που είναι άτοπο. Επομένως η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

Παρατήρηση 2

Είδαμε ότι το όριο μιάς ακολουθίας μπορεί να μην υπάρχει. Αν όμως υπάρχει τότε είναι μοναδικό (δηλαδή αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ & $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$).

Για τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας συνήθως χρησιμοποιείται μία ή περισσότερες από τις παρακάτω πρότασεις καθώς και το όριο μερικών (γνωστών) βασικών ακολουθιών.

Πρόταση 1 (ιδιότητες των ορίων)

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ και $\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ δύο ακολουθίες των οποίων τα όρια υπάρχουν, τότε:

(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

(β) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n, \lambda \in \mathbb{R}$

(γ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ (οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \right)^k$)

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n} \quad (\text{όταν } \beta_n \neq 0, \forall n \text{ και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \neq 0)$$

$$(\varepsilon) \text{ Εάν } \{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\alpha_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n}$$

Πρόταση 2 (απόλυτη σύγκλιση)

Εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = a$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = |a|$ δηλαδή αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε **συγκλίνει απόλυτα** (δηλαδή συγκλίνει και η ακολουθία των απολύτων τιμών των όρων της).

Παρατήρηση 3

(α) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης 2 δεν ισχύει πάντα, δηλαδή μπορεί να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = |a|$, αλλά το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ να μην υπάρχει.

Παράδειγμα

Είδαμε ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, αλλά $|\alpha_n| = |(-1)^n| = 1$ δηλαδή είναι σταθερή ακολουθία (οπότε τετριμένα συγκλίνει στο 1).

(β) Το αντίστροφο ισχύει πάντα στην περίπτωση μηδενικής ακολουθίας, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 \text{ τότε και μόνον τότε όταν } \lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = 0.$$

Εφαρμογή 4

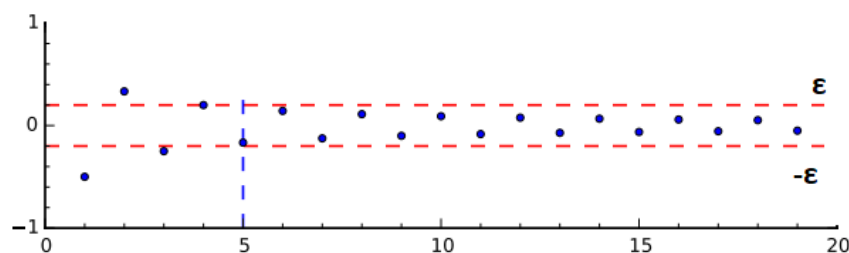
Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (\beta) \alpha_n = 3 + \frac{4}{n^4} + \frac{(-1)^n}{2n} \quad (\gamma) \alpha_n = \frac{n + (-1)^n}{n} \quad (\delta) \alpha_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Λύση

(α) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ οπότε από την παρατήρηση 3(β) έχουμε

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$



(β) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{n^4} + \frac{(-1)^n}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^4} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 3 + 0 + 0 = 3$ (από την εφαρμογή 1 και το (α)).

(γ) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1$

(δ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$. Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0, \text{ δηλαδή } \lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = 0$$

οπότε από την παρατήρηση 3(β) έχουμε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

■

Πρόταση 3 (ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες)

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ **τελικά** (δηλαδή $\forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ανισότητα ισχύει από έναν δείκτη n_0 και μετά) και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \alpha$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

(α) $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ (β) $\alpha_n = \frac{\eta\mu n}{n}$ (γ) $\alpha_n = \frac{\eta\mu n}{1 + \sqrt{n}}$

Λύση

(α) Είναι εύκολο να δει κανείς (π.χ. με επαγωγή) ότι: $n < 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$.

Αλλά, αν $\alpha_n = 0$, $\beta_n = \frac{1}{2^n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, οπότε από την πρόταση 3

(των ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών) έχουμε: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(β) Είναι γνωστό ότι $0 \leq |\eta\mu n| \leq 1$, $\forall n$, οπότε και $0 \leq \frac{|\eta\mu n|}{n} \leq \frac{1}{n}$. Αλλά, αν

$\alpha_n = 0$, $\delta_n = |\beta_n| = \frac{|\eta\mu n|}{n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, οπότε από την πρόταση 3

(των ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών) έχουμε: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\eta\mu n|}{n} = 0$.

Τέλος, επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\eta\mu n|}{n} = 0$, έπεται από την παρατήρηση 3(β) ότι και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu n}{n} = 0$$

■

Ορισμός 3 (άπειρο όριο ακολουθίας)

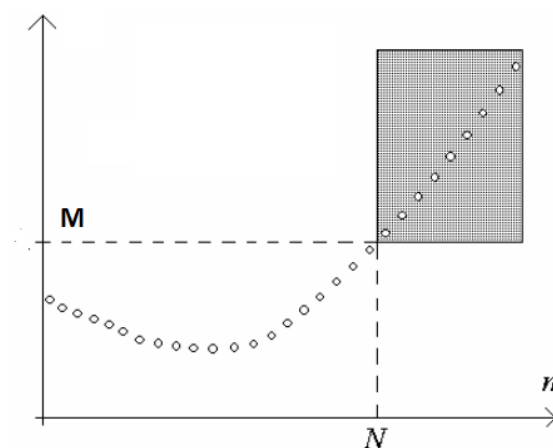
Λέμε ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **αποκλίνει στο** $+\infty$, ή το **όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι το $+\infty$ (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$), εάν για κάθε $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$\alpha_n > M$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι α_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό M .



Ανάλογα, λέμε ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **αποκλίνει στο** $-\infty$, ή το **όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι το $-\infty$ (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$), εάν για κάθε $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$\alpha_n < -M$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι α_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, είναι μικρότεροι από τον αριθμό $-M$.

Εφαρμογή 6

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $M > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\alpha_n > M$

Αλλά:

$$\alpha_n > M \Leftrightarrow \sqrt{n} > M \Leftrightarrow n > M^2$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > M^2$, τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Εφαρμογή 7

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n-1} = 1, (n \geq 2)$

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $M > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M , και τον οποίο θα πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$ να έπεται $\alpha_n > M$.

Αλλά

$$\alpha_n = \frac{n^2}{n-1} > \frac{(n-1)^2}{n-1} > M \Leftrightarrow n-1 > M \Leftrightarrow n > M+1$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > M+1$, τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Θεώρημα 1

(α) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 0$$

(β) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, τότε:

(I) εάν (τελικά) $\alpha_n > 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$.

(II) εάν (τελικά) $\alpha_n < 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = -\infty$.

(γ) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $\alpha_n \leq \beta_n$ **τελικά** (δηλαδή $\forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$), τότε

(I) εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

(II) εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = -\infty$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$.

Πρόταση 4 (Όριο γνωστών ακολουθιών)

Μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύουν τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

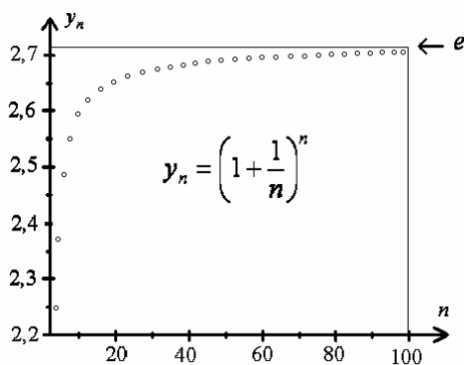
$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$(\gamma) \text{ Εάν } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad a > 0, \quad a_n > 0$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Παρατήρηση 4

Μια επαλήθευση του 4(δ) δίνεται στο παρακάτω γράφημα (το οποίο κατασκευάζεται με τη βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί).



n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
5	2.48832
10	2.593742460
20	2.653297705
50	2.691588029
100	2.704813829
1000	2.716923932
10 000	2.718145927
100 000	2.718268237
1000 000	2.718280469

Εφαρμογή 8

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{(n+2)!}{n!} \quad (\beta) \alpha_n = \frac{3}{1 - \sqrt[n]{n}}$$

Λύση

(α) Το $\alpha_n = \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n!} = (n+1) \cdot (n+2) = n^2 + 3n + 2$. Αλλά $\alpha_n = n^2 + 3n + 2 > n^2$ και

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, οπότε από το θεώρημα 1(γ) (I) έχουμε τελικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{n!} = +\infty$.

(β) Είναι γνωστό από την πρόταση 4(α) ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ και $\sqrt[n]{n} > 1$ οπότε $1 - \sqrt[n]{n} < 0$, ενώ

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt[n]{n}) = 1 - 1 = 0$. Από το θεώρημα 1(β)(II) έχουμε τελικά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty.$$

■

Εφαρμογή 9

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(α) \alpha_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{n}} \quad (β) \alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad (γ) \alpha_n = \sqrt[n]{5^n \cdot n} \quad (δ) \alpha_n = \left(1 + \frac{3}{8n}\right)^n$$

$$(ε) \alpha_n = \sqrt[n]{4^{2n+1}} \quad (στ) \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \quad (ζ) \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5}$$

Λύση

(α) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}$. Αλλά από την πρόταση 4(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ και από το

$$4(β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3} = 1, \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(β) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \text{ από την}$$

πρόταση 4(δ).

(γ) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{5^n \cdot n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 5 \cdot 1 = 5$ από την πρόταση 4(α)

$$(δ) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \left(1 + \frac{3}{8n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \left(1 + \frac{\frac{3}{8}}{n}\right)^n = e^{\frac{3}{8}} \text{ από την πρόταση 4(δ).}$$

(ε) Έχουμε: $\alpha_n = \sqrt[n]{4^{2n+1}} = \sqrt[n]{4^{2n}} \cdot 4 = \sqrt[n]{(4^2)^n} \cdot 4 = \sqrt[n]{16^n} \cdot 4 = \sqrt[n]{16^n} \cdot \sqrt[n]{4}$ οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^{2n+1}} = 16 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4} = 16 \cdot 1 = 16 \text{ από την πρόταση 4(β).}$$

$$(στ) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$$

$$(\zeta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5$$

$$\text{Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n\right]^2 = \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^2 \text{ και}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)\right)^5 = 1^5 = 1 \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5} = \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^2 \cdot 1 = e^{\frac{2}{5}}$$

■

Για το όριο μιας ακολουθίας λοιπόν έχουμε τις παρακάτω ενδιαφέρουσες περιπτώσεις.

A. Όριο ρητών ακολουθιών

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ όπου $P(n)$ και $Q(n)$ είναι πολυώνυμα του n

(δηλαδή εδώ $\alpha_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$), **διαιρούμε** τον αριθμητή και τον παρανομαστή με n^k (όπου k είναι η μεγαλύτερη δύναμη που εμφανίζεται στο κλάσμα).

Τότε θα ισχύουν:

I. Αν ο βαθμός $(P(n)) >$ του βαθμού $(Q(n))$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty \quad (\text{εξαρτάται από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων})$$

II. Αν ο βαθμός $(P(n)) <$ του βαθμού $(Q(n))$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$$

III. Αν ο βαθμός $(P(n)) =$ του βαθμού $(Q(n))$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \text{πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων}$$

Εφαρμογή 10

Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών.

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2}$$

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5n^2}{-n^5 + 6n}$$

$$(\gamma) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 2}{6 - 3n^3}$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3}{2 + n^5}$$

$$(\varepsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 + 5n^2}{8n^3 + 6n^2 + 2}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 + 2}{n + 7}$$

Λύση

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^4} + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{2}{n^4}}{\frac{3n^2}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}$$

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2} \text{ (διαιρώ με } n^4)$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

από το θεώρημα 1(β)(I) (η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2} > 0$ είναι ακολουθία θετικών όρων).

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5n^2}{-n^5 + 6n} \text{ (διαιρώ με } n^5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^5} + \frac{5n^2}{n^5}}{-\frac{n^5}{n^5} + \frac{6n}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}}{-1 + \frac{6}{n^4}} \stackrel{\frac{1}{n^k} \rightarrow 0}{=} \frac{0 + 0}{-1 + 0} = 0$$

$$(\gamma) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 2}{6 - 3n^3} \text{ (διαιρώ με } n^3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{5n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3}}{\frac{6}{n^3} - \frac{3n^3}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}}{\frac{6}{n^3} - 3} = \frac{1 + 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3}{2 + n^5} \left(\begin{array}{cc} \text{βαθμός } P=4 \\ \text{βαθμός } Q=5 \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^5} + \frac{3}{n^5}}{\frac{2}{n^5} + \frac{n^5}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^5}}{\frac{2}{n^5} + 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0$$

$$(\varepsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 + 5n^2}{8n^3 + 6n^2 + 2} \left(\begin{array}{cc} \text{βαθμός } P=3 \\ \text{βαθμός } Q=3 \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6\frac{n^3}{n^3} + 5\frac{n^2}{n^3}}{8\frac{n^3}{n^3} + 6\frac{n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{5}{n}}{8 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{6 + 0}{8 + 0 + 0} = \frac{6}{8}$$

(πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων $= \frac{6}{8}$).

$$(\sigma\tau) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2+2}{n+7} \left(\frac{\text{βαθμός } P=2}{\text{βαθμός } Q=1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2+2}{n+7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{n}{n^2} + \frac{7}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}} = -\infty$$

από το θεώρημα 1(β)(II) (λόγω του όρου $-n^2$, η ακολουθία $a_n = \frac{-n^2+2}{n+7}$ είναι ακολουθία αρνητικών όρων, εκτός από τον 1^{ης} όρο: $1/8, -2/9, -7/10, \dots$).

■

Εφαρμογή 11

Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών.

$$(α) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) \quad (β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} \quad (γ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$$

$$(δ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πηλίκου των λογαρίθμων έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{2n^2+1}{3n^2+4} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4} \right). \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}}{3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) = \ln \frac{2}{3}.$$

$$(β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+5}{3n+2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{3n+2}}. \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}}{3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(γ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n! - n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n!(1 - (n+1))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{1 - n - 1} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = -1$$

$$(δ) \text{ Είναι γνωστό ότι: } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

■

B. Όριο ριζικών

Εφαρμογή 12

(α) Για το όριο της μορφής $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(a+\beta)(a-\beta)=a^2-\beta^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(β) Για το όριο της μορφής $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1})$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(a+\beta)(a-\beta)=a^2-\beta^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^3+4})^2 - (\sqrt{n^3+1})^2}{(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+4-n^3-1}{(\sqrt{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}+\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^3\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)} = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

■

Γ. Όριο ακολουθιών της μορφής r^n

Εφαρμογή 13

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 28^n}{20^n}$

Λύση

Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον μεγαλύτερο παράγοντα (28^n):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 28^n}{20^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{5^n}{28^n} + 7 \cdot \frac{28^n}{28^n}}{\frac{20^n}{28^n}} = \frac{2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{28}\right)^n + 7 \cdot 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{28}\right)^n} = \frac{0 + 7}{0} = \frac{7}{0} = +\infty$$

(από το θεώρημα 1(β)(Ι) γιατί πρόκειται για ακολουθία ακολουθία θετικών όρων).

■

Παρατήρηση 5

Αν $|r| < 1$ τότε η ακολουθία $\alpha_n = r^n \rightarrow 0$

π.χ. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Εφαρμογή 14

Να υπολογιστεί το όριο των παρακάτω ακολουθιών:

(α) $\alpha_n = \frac{2^n}{3^{n+5}}$ (β) $\alpha_n = \frac{3^n}{1+3^n}$ (γ) $\alpha_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + 1}$

Λύση

(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{n+5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot 3^5} = \frac{1}{3^5} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3^5} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3^5} \cdot 0 = 0$

(β) Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το 3^n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{1+3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

(γ) Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον μεγαλύτερο παράγοντα (e^{2n}):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^n}{e^{2n}} + \frac{e^{-n}}{e^{2n}}}{\frac{e^{2n}}{e^{2n}} + \frac{1}{e^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^n} + \frac{1}{e^{3n}}}{1 + \frac{1}{e^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n + \left(\frac{1}{e}\right)^{3n}}{1 + \left(\frac{1}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{3n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{2n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

■

Εφαρμογή

Υπολογίστε τα όρια κάθε μίας από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(α) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n^3 + 5n^2 + 2}{6n^2 - 7n^3} \quad (β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^n - 4^n}{3 + 7^{n+1}}$$

Δ. Όριο μονότονων και φραγμένων ακολουθιών

Αρκετές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας ακολουθίας (εφ' όσον υπάρχει). Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι αρκετό, τις περισσότερες φορές, να δείξουμε ότι υπάρχει. Χρήσιμα, στον σκοπό αυτό, είναι τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν.

Ορισμός 4

(α) Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **άνω φραγμένη** (αντίστοιχα **κάτω φραγμένη**), αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $a_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $a_n \geq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

(β) Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **αύξουσα** (αντίστοιχα **φθίνουσα**), αν $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Παρατήρηση 6

Για να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι αύξουσα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

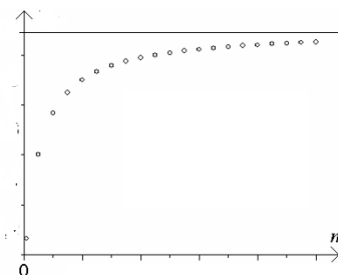
$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Αντίστοιχα, για να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι φθίνουσα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Θεώρημα 2

Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.



Παρατήρηση 7

Το θεώρημα μας αναφέρει ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει, δεν μας λέει όμως ποιο είναι το όριο αυτό.

Εφαρμογή 15

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n+1}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 1:

$$n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1,$$

δηλαδή $a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (ο αριθμητής είναι εδώ πάντα μικρότερος από τον παρονομαστή).

Ακόμα η ακολουθία είναι (γνήσια) αύξουσα, γιατί:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + n + n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει.

■

Παρατήρηση 8

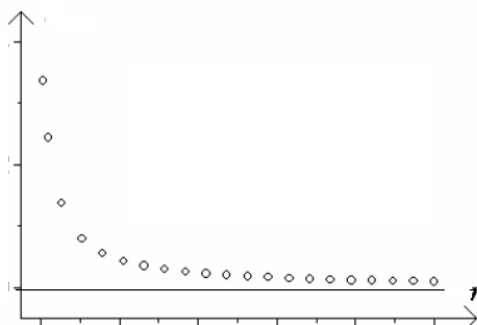
Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε, με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην αρχή της παραγράφου, ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Γενικά όμως όπως είπαμε είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας (συγκλίνουσας) ακολουθίας.

Θεώρημα 3

Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.



Εφαρμογή 16

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το 1: $n+1 > n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n}{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1$, δηλαδή $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (ο παρονομαστής είναι εδώ πάντα μικρότερος από τον αριθμητή).

Ακόμα η ακολουθία είναι (γνήσια) φθίνουσα, γιατί:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2) \cdot n - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει. ■

Παρατήρηση 9

Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ε. Αναδρομικές ακολουθίες

Ορισμός 5

Μια ακολουθία όπου κάθε όρος της ακολουθίας δίνεται σαν συνάρτηση προηγούμενων όρων της, καλείται **αναδρομική** ακολουθία. Π.χ $a_{n+1} = 4 - a_n, a_1 = 2, n \in \mathbb{N}$

Εφαρμογή 17 (αναδρομικές ακολουθίες)

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \frac{3a_n - 4}{5}, a_1 = -3, n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Λύση

Α) Μελέτη μονότονου

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα με τη βοήθεια της **μαθηματικής επαγωγής**, δηλαδή

$$a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N} (*).$$

$$\text{Εάν } n=1, \text{ τότε: } a_2 = \frac{3a_1 - 4}{5} = \frac{3 \cdot (-3) - 4}{5} = -\frac{13}{5} > a_1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (*) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} > a_k$.

Θα δείξουμε την (*) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} > a_{k+1}$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} > a_k \Rightarrow 3a_{k+1} > 3a_k \Rightarrow 3a_{k+1} - 4 > 3a_k - 4 \Rightarrow \frac{3a_{k+1} - 4}{5} > \frac{3a_k - 4}{5} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$$

Δηλαδή $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ή με άλλα λόγια η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα.

Β) Μελέτη φραγμένου.

Αφού η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα, είναι κάτω φραγμένη από τον πρώτο όρο της $a_1 = -3$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα άνω φράγμα της (εάν υπάρχει). Θεωρούμε τη λεγόμενη **χαρακτηριστική εξίσωση** της ακολουθίας που είναι η:

$$x = \frac{3x-4}{5} \Rightarrow 5x = 3x-4 \Rightarrow x = -2$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι άνω φραγμένη από το -2 (πάλι με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής), δηλαδή:

$$a_n < -2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**).$$

$$\text{Εάν } n=1, \text{ τότε: } a_2 = \frac{3a_1-4}{5} = \frac{3 \cdot (-3)-4}{5} = -\frac{13}{5} < -2.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (**) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} < -2$.

Θα δείξουμε την (**) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} < -2$.

Από το ότι:

$$\begin{aligned} a_{k+1} < -2 &\Rightarrow 3a_{k+1} < -6 \Rightarrow 3a_{k+1} - 4 < -10 \Rightarrow \frac{3a_{k+1} - 4}{5} < -\frac{10}{5} = -2 \\ &\Rightarrow a_{k+2} = \frac{3a_{k+1} - 4}{5} < -2 \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2, θα συγκλίνει (θα υπάρχει δηλαδή το όριό της).

Γ) Εύρεση ορίου.

Για το όριο θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \frac{3 \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 4}{5}. \text{ Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x, \text{ οπότε: } x = \frac{3x-4}{5} \Rightarrow 5x = 3x-4 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -2.$$

■

Εφαρμογή

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \frac{4a_n+3}{5}$, $a_1 = 3$, $a_n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Εφαρμογή 18

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_1 = 4$, $a_n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Λύση

A) Μελέτη μονότονου

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα με τη βοήθεια της **μαθηματικής επαγωγής**, δηλαδή:

$$a_{n+1} < a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*).$$

Εάν $n=1$, τότε: $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} < 4 = a_1$.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (*) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} < a_k$.

Θα δείξουμε την (*) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} < a_{k+1}$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} < a_k \Rightarrow 2+a_{k+1} < 2+a_k \Rightarrow \sqrt{2+a_{k+1}} < \sqrt{2+a_k} \Rightarrow a_{k+2} < a_{k+1}$$

Δηλαδή $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ή με άλλα λόγια η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα.

B) Μελέτη φραγμένου.

Αφού η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα, είναι άνω φραγμένη από τον πρώτο όρο της $a_1 = 4$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα της (εάν υπάρχει). Η χαρακτηριστική εξίσωση της ακολουθίας είναι:

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι κάτω φραγμένη από το 2 (η ακολουθία είναι μια ακολουθία θετικών όρων).

Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι:

$$a_n > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**).$$

Εάν $n=1$, τότε: $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} > 2$.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (**) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} > 2$.

Θα δείξουμε την (**) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} > 2$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} > 2 \Rightarrow 2 + a_{k+1} > 2 + 2 \Rightarrow \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow a_{k+2} > 2$$

Αφού η ακολουθία είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, σύμφωνα με το θεώρημα 3, θα συγκλίνει (θα υπάρξει δηλαδή το όριό της).

Γ) Εύρεση ορίου.

Για το όριο θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}. \text{ Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x, \text{ οπότε:}$$

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Αλλά το -1 απορρίπτεται λόγω του ότι η ακολουθία είναι θετικών όρων.

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$$

■