

1. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

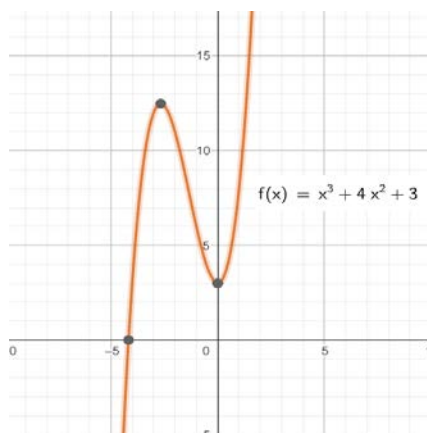
Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις συναρτήσεις:

$$(i) f_1(x) = x^3 + 4x^2 + 3 \quad (ii) f_2(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} \quad (iii) f_3(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 9}$$

Λύση

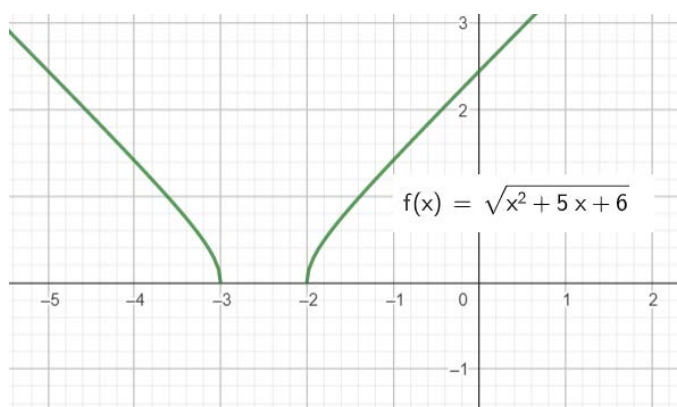
- (i) Η συνάρτηση f_1 είναι πολυωνυμική, άρα το πεδίο ορισμού της είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή το $\mathbb{R}$.



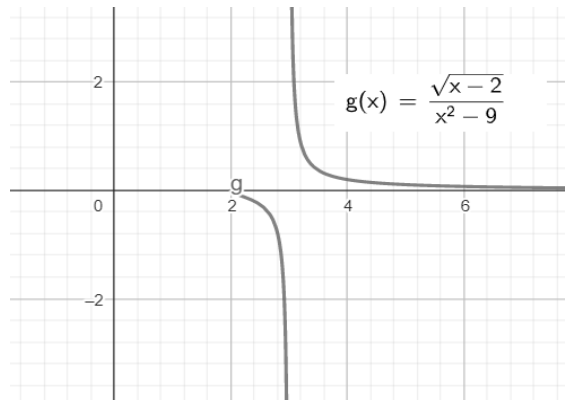
- (ii) Για να ορίζεται η $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ θα πρέπει $x^2 + 5x + 6 \geq 0$. Αλλά το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει ρίζες τις $x = -3$, $x = -2$ και ο πίνακας πρόσημου του είναι:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x^2 + 5x + 6$	+	0	0	+
		-		

οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_2 είναι $(-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$.



- (iii) Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$, θα πρέπει $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Ακόμα θα πρέπει $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_3 θα είναι ίσο με: $\{x / x \geq 2, x \neq \pm 3\} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

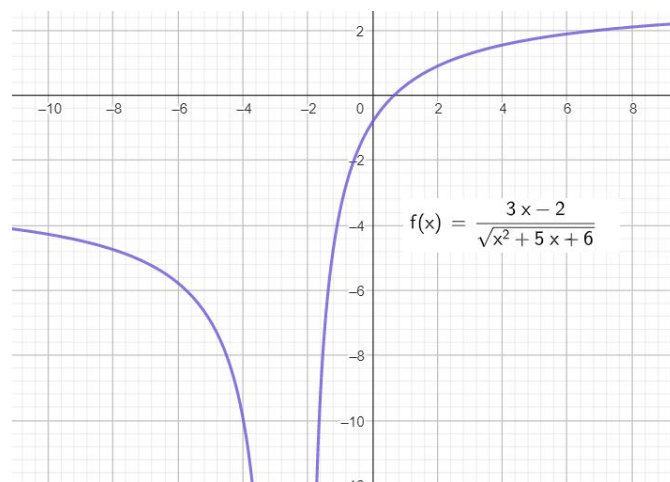


Παράδειγμα 2

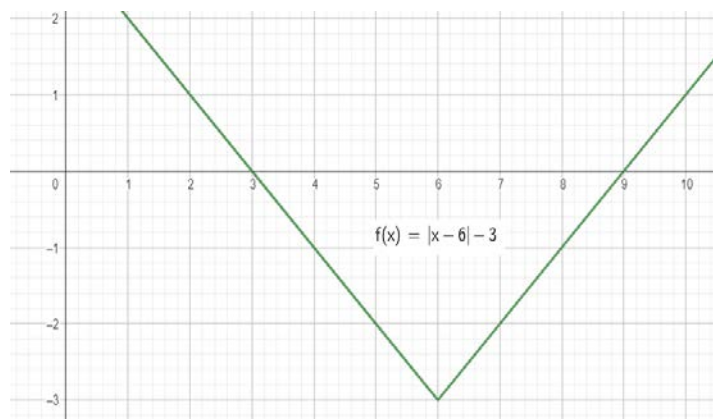
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{(3x-2)}{\sqrt{x^2+5x+6}}$, και το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών για την $g(x) = |x-6| - 3$.

Λύση

(α) Για να ορίζεται η $f(x)$ θα πρέπει $\sqrt{x^2+5x+6} > 0$, αλλά το τριώνυμο έχει ρίζες τις $x = -3, x = -2$. Από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα είναι $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.



(β) Ο τύπος της συνάρτησης $g(x)$ περιέχει την απόλυτη τιμή. Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή θα είναι είτε θετική είτε μηδέν. Στην περίπτωση μας η απόλυτη τιμή θα είναι μηδέν όταν $x = 6$, οπότε το μέρος της συνάρτησης με την απόλυτη τιμή θα είναι πάντα μεγαλύτερο ίσο από το μηδέν. Αφαιρώντας το 3 από το μέρος της συνάρτησης με τα απόλυτο προκύπτει ότι η τιμή της συνάρτησης θα παίρνει τιμές μεγαλύτερες ίσες του -3. Άρα το πεδίο τιμών της $g(x)$ θα είναι το διάστημα $[-3, \infty)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών $(-\infty, \infty)$.



■

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} f_1(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\text{ii)} f_2(x) = e^{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \ln(x-1)$$

Λύση

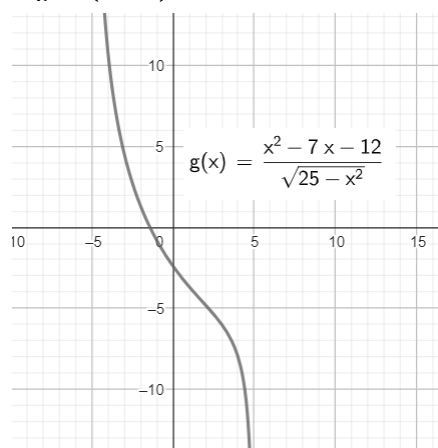
i) Για να ορίζεται η $f_1(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{25 - x^2}}$ θα πρέπει: ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, δηλ.

$$\sqrt{25 - x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 25 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (5 - x)(5 + x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ και } x \neq -5 \quad (1)$$

και η υπόριζη ποσότητα μη αρνητική, δηλ.

$$25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 5] \quad (2)$$

Με συναλήθευση των (1) και (2) βρίσκουμε τελικά ότι το πεδίο ορισμού της $f_1(x)$ είναι το ανοικτό διάστημα $(-5, 5)$.



ii) Για να ορίζεται η $f_2(x) = e^{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \ln(x-1)$ θα πρέπει: ο παρονομαστής του κλάσματος $\frac{1-x}{x^2-5x+6}$ να είναι διάφορος του μηδενός, δηλ.

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ και } x \neq 2 \quad (1)$$

και το όρισμα του λογαρίθμου να είναι θετικό, δηλ.

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \quad (2)$$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς **(1)** και **(2)** βρίσκουμε τελικά ότι το πεδίο ορισμού της $f_2(x)$ είναι: $x \in (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

■

Σύνθεση συναρτήσεων

Παράδειγμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 5x + 7$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι τύποι των συναρτήσεων: (i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$.

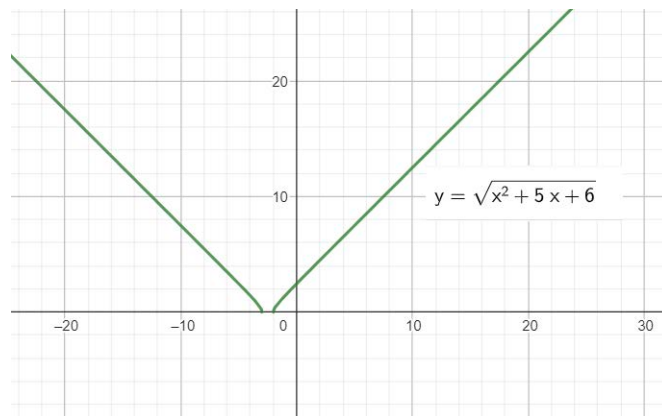
Λύση

Το πεδίο ορισμού της g (σαν πολωνυμική) είναι το $\mathbb{R}$, ενώ της f είναι το $[1, +\infty)$. Το Π.Ο της $f \circ g$ είναι εκείνα τα στοιχεία του Π.Ο. της g έτσι ώστε οι εικόνες του μέσω της g να ανήκουν στο Π.Ο. της f δηλαδή:

$$\{x / x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 5x + 7 \geq 1\} = \{x / x^2 + 5x + 6 \geq 0\} = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$$

Για την $f \circ g$ έχουμε:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{x^2 + 5x + 7 - 1} = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

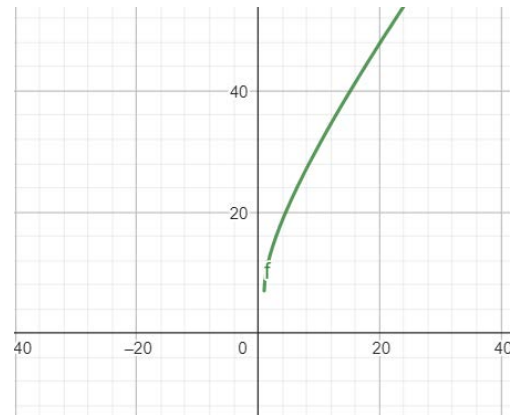
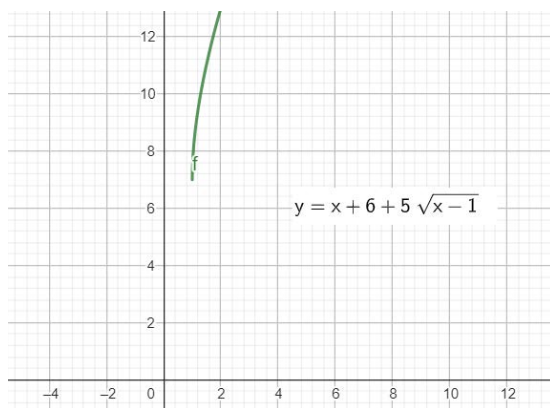


Ακόμα, το Π.Ο της $g \circ f$ είναι εκείνα τα στοιχεία του Π.Ο. της f έτσι ώστε οι εικόνες του μέσω της f να ανήκουν στο Π.Ο. της g δηλαδή:

$$\{x / x \geq 1, f(x) = \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = \{x / x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

Για την $g \circ f$ έχουμε:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 + 5f(x) + 7 = (\sqrt{x-1})^2 + 5\sqrt{x-1} + 7 = x - 1 + 5\sqrt{x-1} + 7 = x + 5\sqrt{x-1} + 6$$



Παράδειγμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-9}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος των συναρτήσεων $f \circ g$, $g \circ f$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού για την $f(x)$ ορίζεται το σύνολο $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$ και το πεδίο ορισμού για την $g(x)$ το σύνολο

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3, x \geq 3\}.$$

Το πεδίο ορισμού για την συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται ως εξής

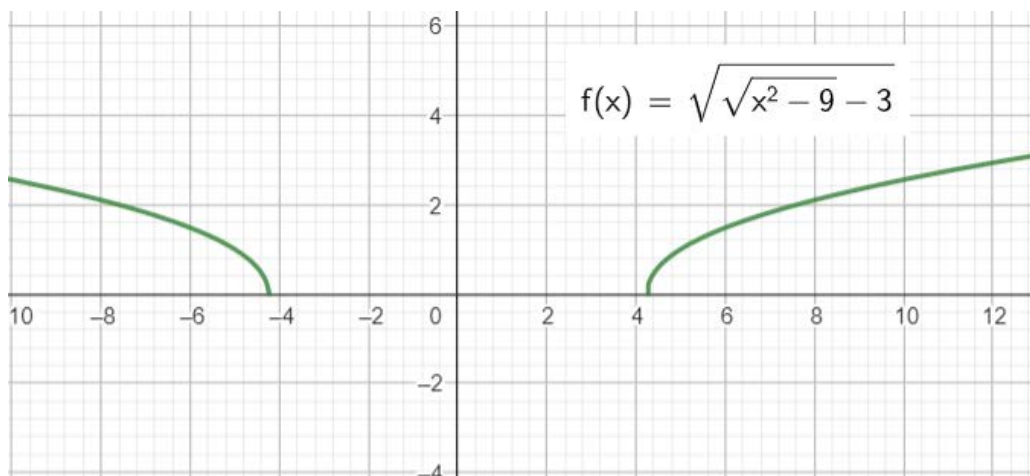
$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \leq -3, x \geq 3 : \sqrt{x^2-9} \in D(f)\}$$

Αλλά

$$\sqrt{x^2-9} \in D(f) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} \geq 3 \Leftrightarrow x^2-9 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 \geq 18 \Leftrightarrow x \leq -3\sqrt{2}, x \geq 3\sqrt{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ θα είναι $(-\infty, -3\sqrt{2}] \cup [3\sqrt{2}, \infty)$. Ο τύπος της $f \circ g$ ορίζεται

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-3} = \sqrt{\sqrt{x^2-9}-3}$$



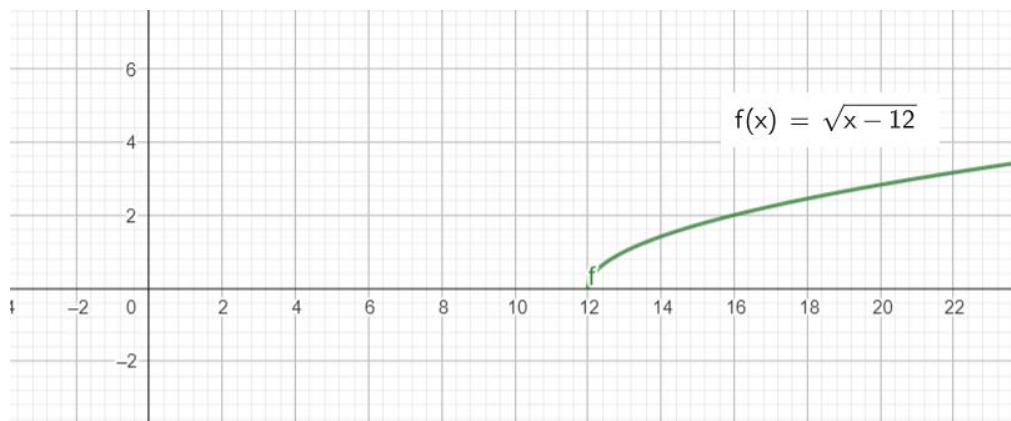
Το πεδίο ορισμού για την συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται ως εξής

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \geq 3 : \sqrt{x-3} \in D(g)\}$$

$$\text{Αλλά } \sqrt{x-3} \in D(g) \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \leq -3 \text{ ή } \sqrt{x-3} \geq 3 \Leftrightarrow x-3 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 12.$$

Συνεπώς το πεδίο της $g \circ f$ είναι το διάστημα $[12, +\infty)$ και ο τύπος της θα δίνεται από

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 3} = \sqrt{(\sqrt{x-3})^2 - 3} = \sqrt{x-12}$$



■

Αντίστροφη συνάρτησης

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x+6}{x-5}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f , να

δειχθεί ότι η f είναι ένα προς ένα και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφής της f^{-1} .

Λύση

Θα πρέπει $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{5\}$. Εάν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+6}{x_1-5} = \frac{x_2+6}{x_2-5} \Rightarrow (x_1+6)(x_2-5) = (x_2+6)(x_1-5) \Rightarrow$$

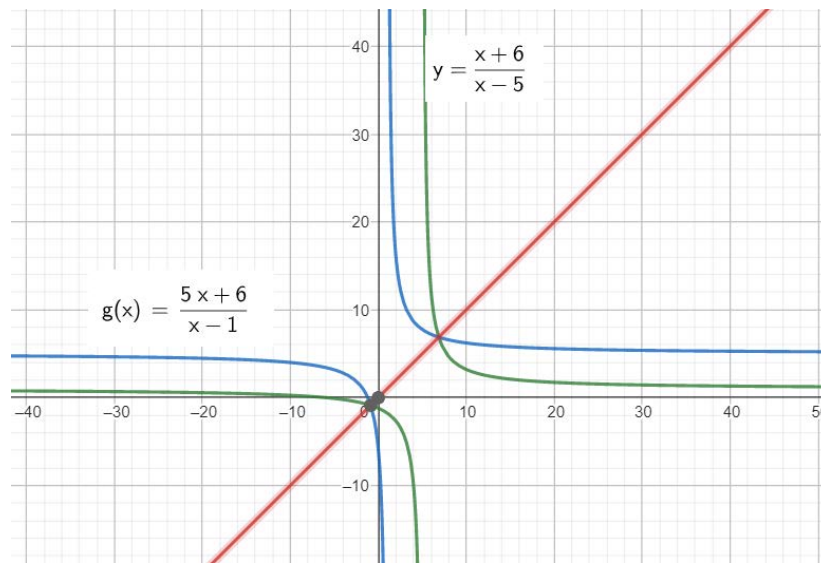
$$x_1x_2 - 5x_1 + 6x_2 - 30 = x_1x_2 - 5x_2 + 6x_1 - 30 \Rightarrow -11(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Για την αντίστροφή της, εάν θέσουμε σαν $y = \frac{x+6}{x-5}$ τότε λύνοντάς τη σχέση αυτή ως προς x , έχουμε:

$$y = \frac{x+6}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = x + 6 \Rightarrow yx - x = 5y + 6 \Rightarrow x(y-1) = 5y + 6 \Rightarrow x = \frac{5y+6}{y-1}$$

Εναλλάσσοντας τα x και y , η αντίστροφη της f έχει τύπο: $f^{-1}(x) = \frac{5x+6}{x-1}$



■

Παρατήρηση

Οι συναρτήσεις f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Παράδειγμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και ο τύπος της.

Λύση

Για να δείξουμε ότι υπάρχει η f^{-1} θα πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη ('1-1') στο διάστημα $[2,5]$. Πράγματι για κάθε:

$x_1, x_2 \in [2,5]$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Γιατί:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1^2-1} = \frac{1}{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2-1 = x_2^2-1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ αφού}$$

$x_1, x_2 \in [2,5] (:)$.

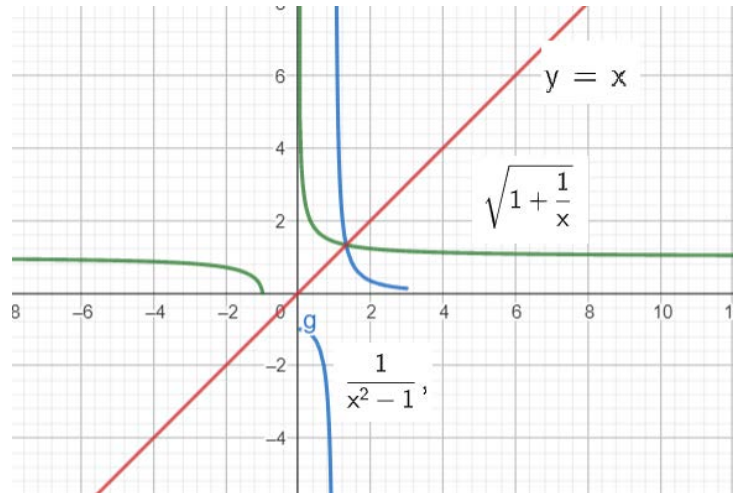
Άρα η f είναι '1-1' στο διάστημα $[2,5]$. Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(y = \frac{1}{x^2-1}, 2 \leq x \leq 5 \right) &\Leftrightarrow \left(x^2-1 = \frac{1}{y}, 2 \leq x \leq 5 \right) \Leftrightarrow \left(x^2 = 1 + \frac{1}{y}, 2 \leq x \leq 5 \right) \Leftrightarrow \\ &\left(x = \sqrt{1 + \frac{1}{y}}, 2 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{y}} \leq 5, 1 + \frac{1}{y} > 0 \right) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{1 + \frac{1}{y}}, \frac{1}{24} \leq y \leq \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

εναλλάσσοντας στην τελευταία σχέση το x με το y προκύπτει ο τύπος για την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[\frac{1}{24}, \frac{1}{3}\right]$.



■

Παράδειγμα 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^2 + 2\sqrt{x-3}$ αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

Αρχικά, θα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της $f(x) = e^2 + 2\sqrt{x-3}$. Αρκεί, η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική, δηλ.

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$. Εξετάζουμε αν η συνάρτηση είναι «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε έχουμε:

$$e^2 + 2\sqrt{x_1 - 3} = e^2 + 2\sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow \sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι «1-1». Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $R(f)$ της f . Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

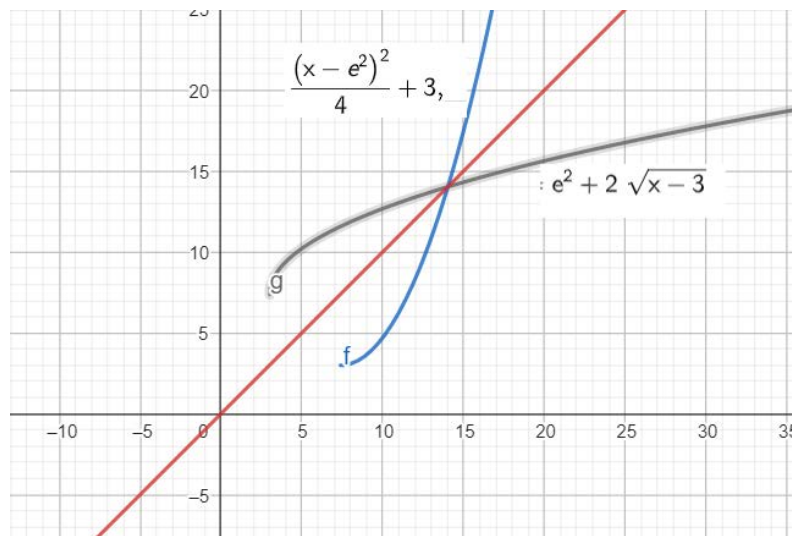
$$y = e^2 + 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \frac{y-e^2}{2} = \sqrt{x-3} \quad (1)$$

Επειδή, $\sqrt{x-3} \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{y-e^2}{2} \geq 0 \Rightarrow y \geq e^2 \Rightarrow y \in [e^2, +\infty)$. Δηλ. $R(f) = [e^2, +\infty)$.

Λύνουμε την (1) ως προς x . Έχουμε:

$$\frac{y-e^2}{2} = \sqrt{x-3} \Rightarrow \frac{(y-e^2)^2}{4} = x-3 \Rightarrow x = \frac{(y-e^2)^2}{4} + 3 \quad (2)$$

Με εναλλαγή των μεταβλητών x και y η (2) γράφεται: $y = \frac{(x - e^2)^2}{4} + 3$



Άρα υπάρχει η αντίστροφη της f και είναι η: $f^{-1} : [e^2, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$ με τύπο

$$f^{-1}(x) = \frac{(x - e^2)^2}{4} + 3.$$

Για επαλήθευση, μπορούμε να ελέγξουμε αν $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

■