

Εισαγωγή στην Επιστήμη του Μηχανικού Περιβάλλοντος

Νίκος Ξεκουκουλωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Γραφείο Κ2.125, τηλ.: 28210-37772
e-mail: nikosxek@gmail.com

Κεφάλαιο 3: Ισοζύγια Μάζας

Ισοζύγια μάζας (material balance)



- rien ne se crée,
rien ne se perd,
tout se transforme
- «τίποτα δεν
δημιουργείται, τίποτα
δεν χάνεται, όλα
μετασχηματίζονται
[αλλάζουν]»



Antoine Lavoisier (1743-1794).
και Marie-Anne Pierette Paulze
(1758 –1836).

Ισοζύγια μάζας



- οὐδέν γάρ χρήμα γίνεται, οὐδέ ἀπόλλυται, ἀλλ' ἀπό ἐόντων χρημάτων συμμίσγεται τε και διακρίνεται
- «τίποτα δεν γίνεται ούτε χάνεται [αφανίζεται], αλλά συντίθεται από πράγματα που [προ]υπάρχουν και αποσυντίθεται [διαχωρίζεται]».



Αναξαγόρας
(500 π.Χ.-428 π.Χ.)
Αρχαίος Έλληνας
Φιλόσοφος

Ισοζύγια μάζας και ενέργειας



- Τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας διαδραματίζουν πολύ σπουδαίο ρόλο στην ποσοτική περιγραφή και κατανόηση της συμπεριφοράς των περιβαλλοντικών συστημάτων.
- Αποτελούν μεθόδους υπολογισμού της ροής μάζας και ενέργειας από και προς το υπό μελέτη περιβαλλοντικό σύστημα.
- Τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας προσομοιάζουν με τα χρηματικά ισοζύγια.

Άσκηση 3.1



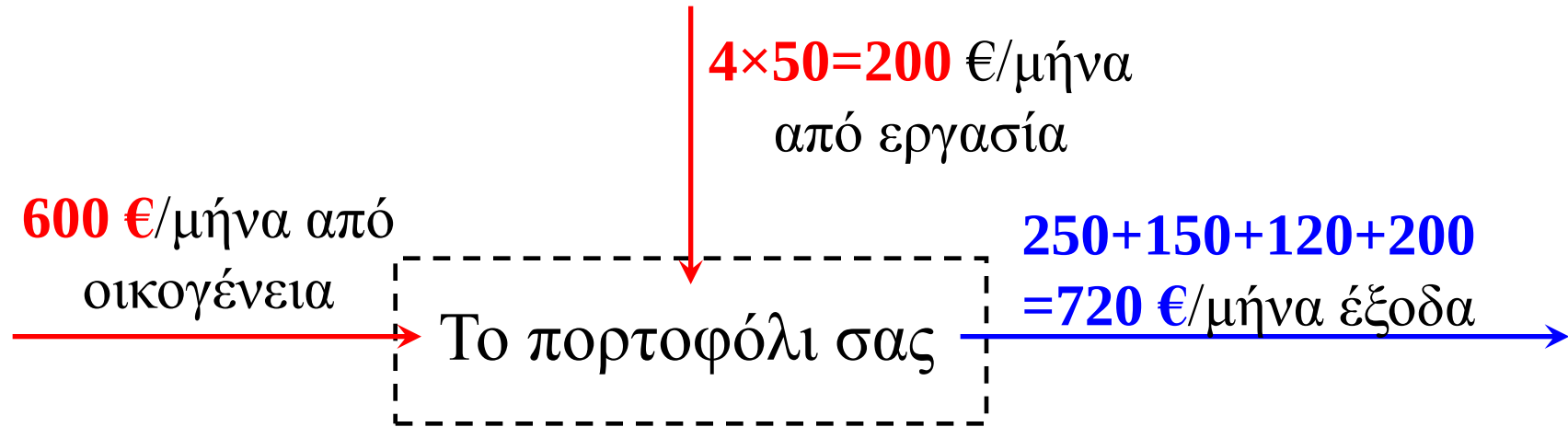
- Ως πρωτοετείς φοιτητές, οι γονείς σας επιδοτούν τις σπουδές σας με 600 € το μήνα.
- Επιπλέον, εσείς αποφασίζετε να εργαστείτε τα Σαββατοκύριακα σε ένα μπαράκι με αμοιβή 50 € κάθε Σαββατοκύριακο.
- Κάθε μήνα ξοδεύετε:
 - ✓ ενοίκιο του σπιτιού: 250 €
 - ✓ φαγητό και προμήθειες του σπιτιού: 150 €
 - ✓ λογαριασμοί (τηλέφωνο, ρεύμα, νερό, κ.τ.λ.): 120 €
 - ✓ διασκέδαση: 200 €.

Άσκηση 3.1



- Σκοπός σας είναι στο τέλος του πέμπτου έτους να έχετε αποταμιεύσει αρκετά χρήματα ώστε να πραγματοποιήσετε ένα μεγάλο ταξίδι στην Ευρώπη το οποίο εκτιμάτε ότι θα σας κοστίσει περίπου 4500 €.
- Τι λέτε, θα τα καταφέρετε;

Άσκηση 3.1: Απάντηση



Χρηματικό Ισοζύγιο:

$$\begin{aligned}\text{αποταμίευση} &= \text{έσοδα} - \text{έξοδα} \\ &= 600 + 200 - 720 = 80 \text{ €/μήνα}\end{aligned}$$

Επομένως σε 5 χρόνια θα έχετε αποταμιεύσει:

$$5 \times 12 \times 80 = 4800 \text{ €}$$

Άρα, εκτός συγκλονιστικού απροόπτου, θα καταφέρετε να πραγματοποιήσετε το ταξίδι!

Μηνιαία κίνηση ενός τραπεζικού λογαριασμού



Ημ/νία	Σημειώσεις	Κατάθεση	Ανάληψη	Ισοζύγιο
1/10	Αρχικό υπόλοιπο			2517,21
3/10	Μισθοδοσία	1125,54		3642,75
5/10	Πληρωμή ενοικίου		350,15	3292,60
12/10	Ανάληψη από ΑΤΜ		280,00	3012,60
18/10	Πληρωμή λογαριασμών		210,25	2802,35
20/10	Κατάθεση στην τράπεζα	150,15		2952,50
25/10	Πληρωμή πιστωτικής κάρτας		85,20	2867,3
28/10	Ανάληψη από ΑΤΜ		180,00	2687,30
31/10	Τελικό υπόλοιπο			2687,30

Χρηματικό ισοζύγιο



- Εξίσωση του χρηματικού ισοζυγίου κατά τη διάρκεια ενός μήνα:

$$\begin{array}{l} \text{τελικό} \\ \text{υπόλοιπο} \end{array} = \begin{array}{l} \text{αρχικό} \\ \text{υπόλοιπο} \end{array} + \begin{array}{l} \text{σύνολο} \\ \text{καταθέσεων} \end{array} - \begin{array}{l} \text{σύνολο} \\ \text{αναλήψεων} \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{τελικό} \\ \text{υπόλοιπο} \end{array} - \begin{array}{l} \text{αρχικό} \\ \text{υπόλοιπο} \end{array} = \begin{array}{l} \text{ή} \\ \text{σύνολο} \\ \text{καταθέσεων} \end{array} - \begin{array}{l} \text{σύνολο} \\ \text{αναλήψεων} \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{l} \text{συσσώρευση} \\ \text{χρημάτων} \end{array} = \begin{array}{l} \text{ή} \\ \text{σύνολο} \\ \text{καταθέσεων} \end{array} - \begin{array}{l} \text{σύνολο} \\ \text{αναλήψεων} \end{array} \quad (3.3)$$

Χρηματικό ισοζύγιο



- **Προσοχή!!!!**: η συσσώρευση χρημάτων στον τραπεζικό λογαριασμό μπορεί να είναι:
- ✓ **θετική (αποταμίευση)** αν οι καταθέσεις είναι περισσότερες από τις αναλήψεις
- ✓ **αρνητική (κατανάλωση)** αν οι καταθέσεις είναι λιγότερες από τις αναλήψεις
- ✓ **μηδενική** αν οι καταθέσεις ισούνται με τις αναλήψεις.

Χρηματικό ισοζύγιο



- Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:
- ✓ Σύνολο καταθέσεων: 1275,69 €.
- ✓ Σύνολο αναλήψεων: 1105,60 €.
- ✓ Παρατηρείται θετική συσσώρευση χρημάτων (αποταμίευση) στον τραπεζικό λογαριασμό κατά: $1275,69 \text{ €} - 1105,60 \text{ €} = 170,09 \text{ €}$.
- ✓ Κατά συνέπεια, το αρχικό υπόλοιπο αυξάνεται από 2517,21 € στην αρχή του μήνα σε $2517,21 \text{ €} + 170,09 \text{ €} = 2687,30 \text{ €}$ στο τέλος του μήνα.

$$2687,30 \text{ €} = 2517,21 \text{ €} + 1275,69 \text{ €} - 1105,60 \text{ €}$$

Χρηματικό ισοζύγιο



- Έως τώρα στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν έχουμε λάβει υπόψη:
- ✓ τους τόκους του κεφαλαίου, οι οποίοι συνεισφέρουν θετικά και αυξάνουν το ποσό των χρημάτων στον τραπεζικό λογαριασμό
- ✓ τους φόρους του κεφαλαίου, οι οποίοι συνεισφέρουν αρνητικά και μειώνουν το ποσό των χρημάτων στον τραπεζικό λογαριασμό
- Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση του χρηματικού ισοζυγίου γράφεται:

Χρηματικό ισοζύγιο



➤ Εξίσωση του χρηματικού ισοζυγίου:

$$\text{συσσώρευση} = \text{σύνολο} - \text{σύνολο} \pm \text{τόκοι} \quad (3.4)$$
$$\text{χρημάτων} \quad \text{καταθέσεων} \quad \text{αναλήψεων} \quad \text{φόροι}$$

- Η εξίσωση (3.4) είναι απολύτως αντίστοιχη με την εξίσωση του ισοζυγίου μάζας και ενέργειας στα περιβαλλοντικά συστήματα.
- Στις φυσικές, χημικές και βιολογικές διεργασίες οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε ένα περιβαλλοντικό σύστημα συχνά παρατηρείται ροή μάζας ή/και ενέργειας από και προς το περιβαλλοντικό σύστημα.



Ισοζύγια μάζας και ενέργειας

- Η ποσότητα μάζας ή/και ενέργειας η οποία βρίσκεται αρχικά στο σύστημα αντιστοιχεί με το αρχικό υπόλοιπο του τραπεζικού λογαριασμού.
- Οι καταθέσεις αντιστοιχούν με την εισροή ύλης ή/και ενέργειας προς το περιβαλλοντικό σύστημα, ενώ οι αναλήψεις με την εκροή ύλης ή/και ενέργειας από το περιβαλλοντικό σύστημα.
- Οι τόκοι και οι φόροι αντιστοιχούν με την παραγωγή και την κατανάλωση ύλης ή/και ενέργειας μέσα στα όρια του περιβαλλοντικού συστήματος.

Ισοζύγια μάζας και ενέργειας



- Η συσσώρευση ύλης ή/και ενέργειας μέσα στα όρια του περιβαλλοντικού συστήματος μπορεί να είναι:
- ✓ θετική, αν η εισροή και η παραγωγή είναι μεγαλύτερες από την εκροή και την κατανάλωση
- ✓ αρνητική, αν η εισροή και η παραγωγή είναι μικρότερες από την εκροή και την κατανάλωση
- ✓ μηδενική, αν η εισροή και η παραγωγή ισούνται με την εκροή και την κατανάλωση.

Ισοζύγια μάζας και ενέργειας



- Τα ισοζύγια μάζας μας παρέχουν τη δυνατότητα υπολογισμού της παραγωγής, της μεταφοράς και της τύχης των ρύπων στο περιβάλλον.
- Τα ισοζύγια ενέργειας μας παρέχουν τη δυνατότητα υπολογισμού της παραγωγής, της μεταφοράς και της τύχης της ενέργειας στο περιβάλλον.
- Σε κάθε περιβαλλοντική διεργασία πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μάζα ή/και την ενέργεια η οποία διακινείται μεταξύ ενός συστήματος και του περιβάλλοντός του.

Άσκηση 3.2



- Τρεις φίλοι, ο Γιώργος, η Μαρία και ο Πέτρος, γευματίζουν στο αγαπημένο τους εστιατόριο.
- Ο λογαριασμός είναι 60 €, οπότε δίνουν ο καθένας 20 € στον υπάλληλο του εστιατορίου.
- Ο ιδιοκτήτης του εστιατορίου αποφασίζει να τους κάνει έκπτωση 5 €, οπότε δίνει τα 5 € στον υπάλληλο να τα επιστέψει στους τρεις φίλους.
- Οι τρεις φίλοι αποφασίζουν να δώσουν φιλοδώρημα στον υπάλληλο 2 € και παίρνει ο καθένας πίσω 1 €.

Άσκηση 3.2



- Άρα ο κάθε φίλος πλήρωσε $20 \text{ €} - 1 \text{ €} = 19 \text{ €}$.
- Δηλαδή συνολικά πλήρωσαν $3 \times 19 \text{ €} = 57 \text{ €}$.
- Επίσης έδωσαν φιλοδώρημα 2 € στον υπάλληλο του εστιατορίου, δηλαδή πλήρωσαν συνολικά $57 \text{ €} + 2 \text{ €} = 59 \text{ €}$.
- Όμως αρχικά έδωσαν 60 € .
- Άρα τι έγινε το 1 € που λείπει μέχρι τα 60 € ?



Ισοζύγιο μάζας (material balance)

- Το ισοζύγιο μάζας ή ισοζύγιο υλικών (materials balance ή mass balance)
- Είναι απόρροια του νόμου διατήρησης της ύλης (law of conservation of matter): η ύλη δεν μπορεί ούτε να δημιουργηθεί αλλά ούτε και να καταστραφεί.
- Η ύλη μπορεί να αλλάζει μορφή ή ιδιότητες: τα υλικά σώματα μπορεί να μετασχηματίζονται σε άλλα υλικά σώματα μέσω χημικών ή/και βιολογικών αντιδράσεων.
- Όμως, η συνολική ποσότητα της ύλης παραμένει αμετάβλητη.

Ισοζύγιο ενέργειας (energy balance)

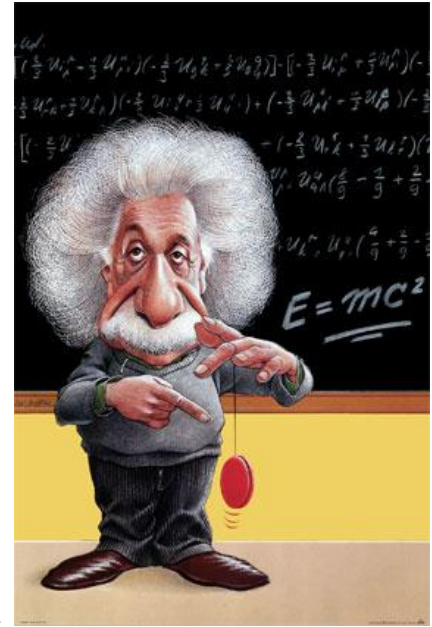


- Το ισοζύγιο ενέργειας (energy balance) είναι απόρροια του νόμου διατήρησης της ενέργειας (law of conservation of energy): η ενέργεια δεν μπορεί ούτε να δημιουργηθεί αλλά ούτε και να καταστραφεί.
- Η ενέργεια αλλάζει μορφές (κινητική, δυναμική, χημική, θερμική) αλλά η συνολική ποσότητά της παραμένει σταθερή.



Ισοζύγια μάζας και ενέργειας

- Σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας του Einstein, η ύλη μπορεί να μετατραπεί σε ενέργεια.
- **Νόμος διατήρησης της ύλης και της ενέργειας:** Η ολική ποσότητα ύλης και ενέργειας είναι σταθερή.
- Ο παραπάνω νόμος βρίσκει εφαρμογή στις πυρηνικές αντιδράσεις.
- Ωστόσο, σε συστήματα περιβαλλοντικού ενδιαφέροντος δεν υφίσταται μετατροπές ύλης και ενέργειας, κατά συνέπεια εξετάζουμε χωριστά τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας.



Ισοζύγιο μάζας

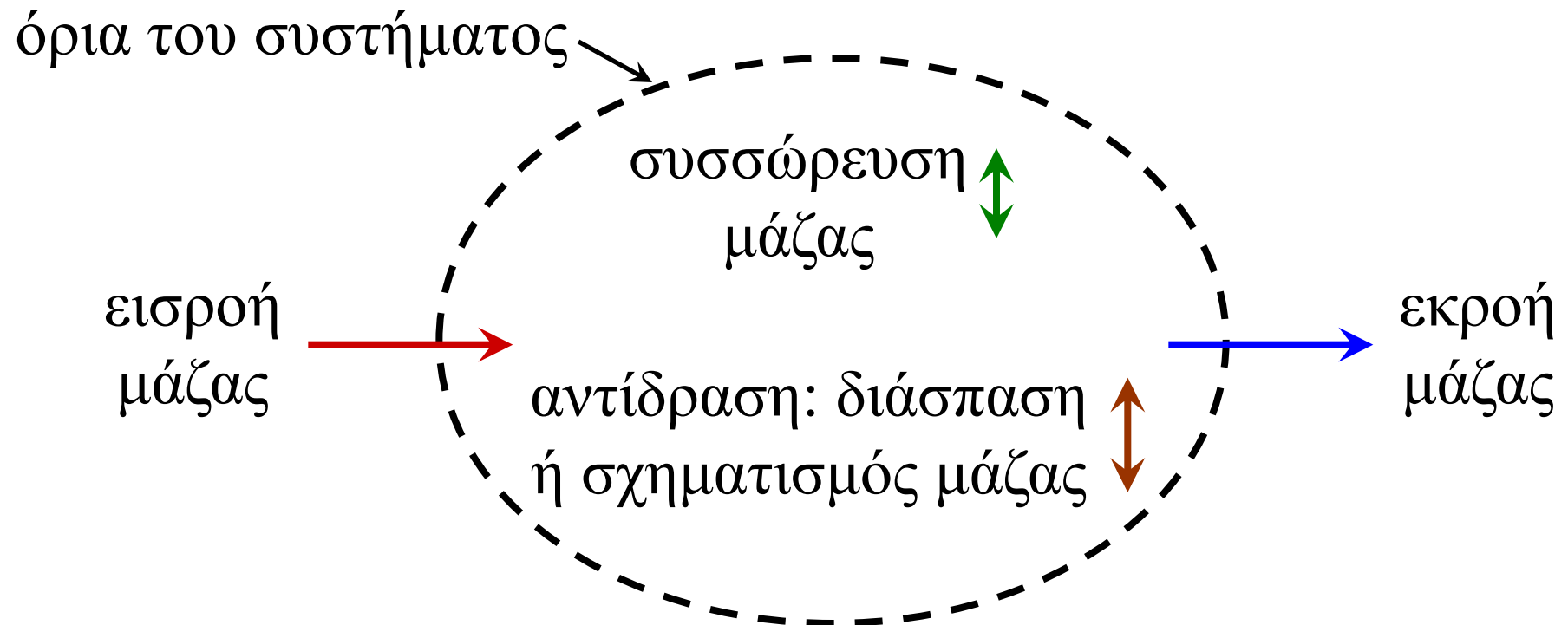


- Το πρώτο βήμα κατά την εφαρμογή του ισοζυγίου μάζας είναι να ορίσουμε επακριβώς τη συγκεκριμένη περιοχή του χώρου στην οποία θα εφαρμοστεί το ισοζύγιο.
- Η περιοχή αυτή ονομάζεται **σύστημα (system or control volume)**.
- Το **σύστημα** μπορεί να είναι ένα ποτήρι με νερό, μια λίμνη, ένα ποτάμι, η θάλασσα, ο αέρας ενός δωματίου, η ατμόσφαιρα πάνω από μία πόλη, όλος ο πλανήτης Γη, ή οποιοδήποτε άλλο περιβαλλοντικό σύστημα μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε.

Ισοζύγιο μάζας



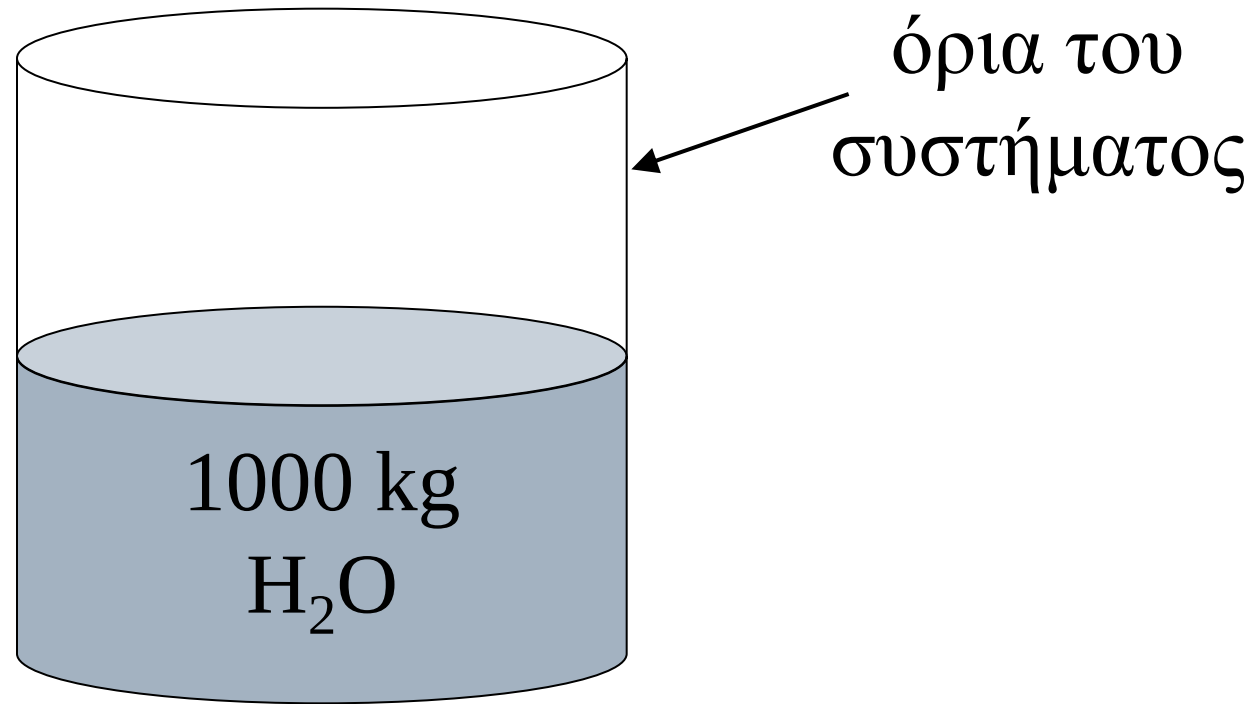
- Συνήθως κατασκευάζουμε ένα απλό γράφημα το οποίο αναπαριστά το σύστημα και του προσδίδουμε φανταστικά **όρια (boundaries)** ώστε να το οριοθετήσουμε επακριβώς.





Ανοικτά και κλειστά συστήματα

- Τα συστήματα διακρίνονται σε:
- ✓ **Κλειστά συστήματα (closed systems):** δεν ανταλλάσσουν μάζα με το περιβάλλον τους.

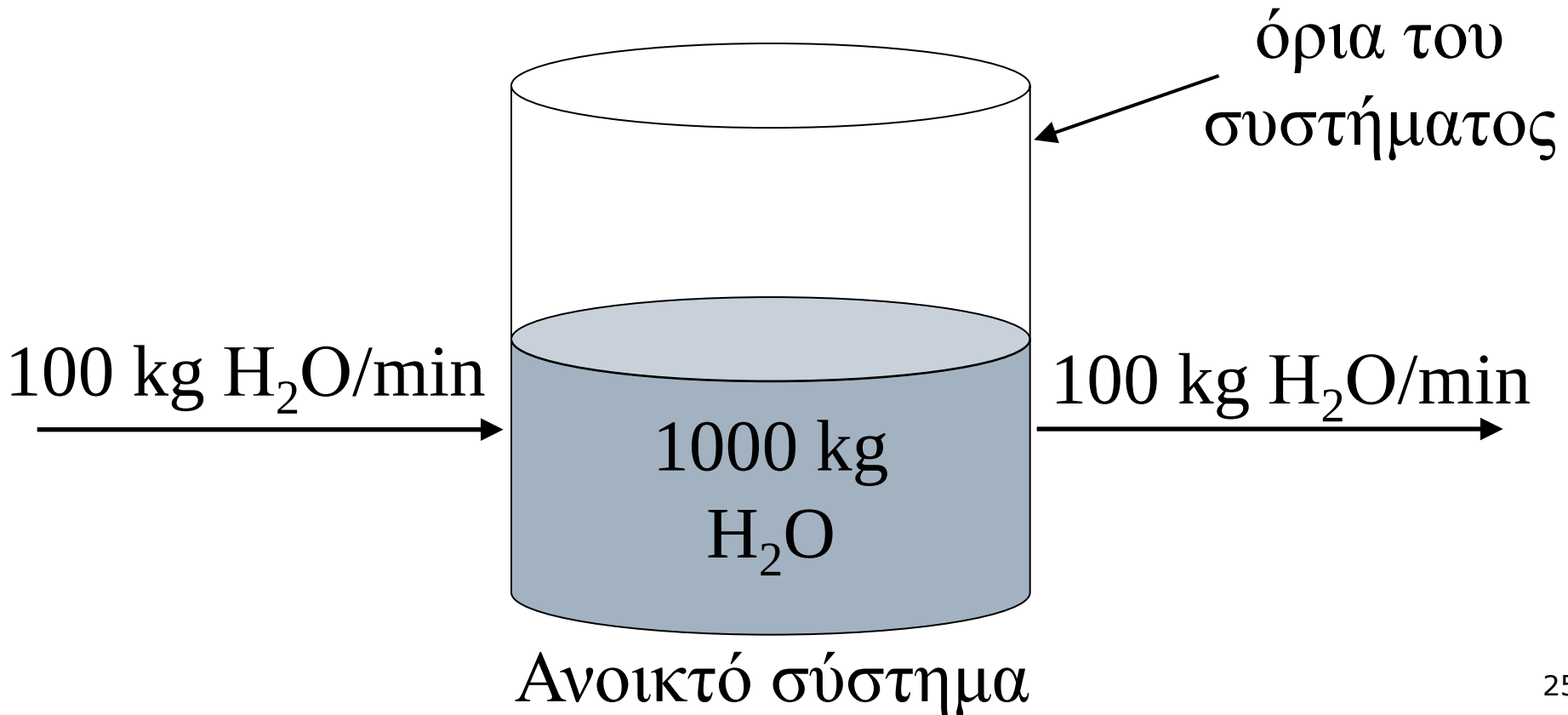


Κλειστό σύστημα

Ανοικτά και κλειστά συστήματα



- ✓ **Ανοικτά συστήματα (open systems):** ποσότητα μάζας εισέρχεται ή/και εξέρχεται από τα όρια του συστήματος.

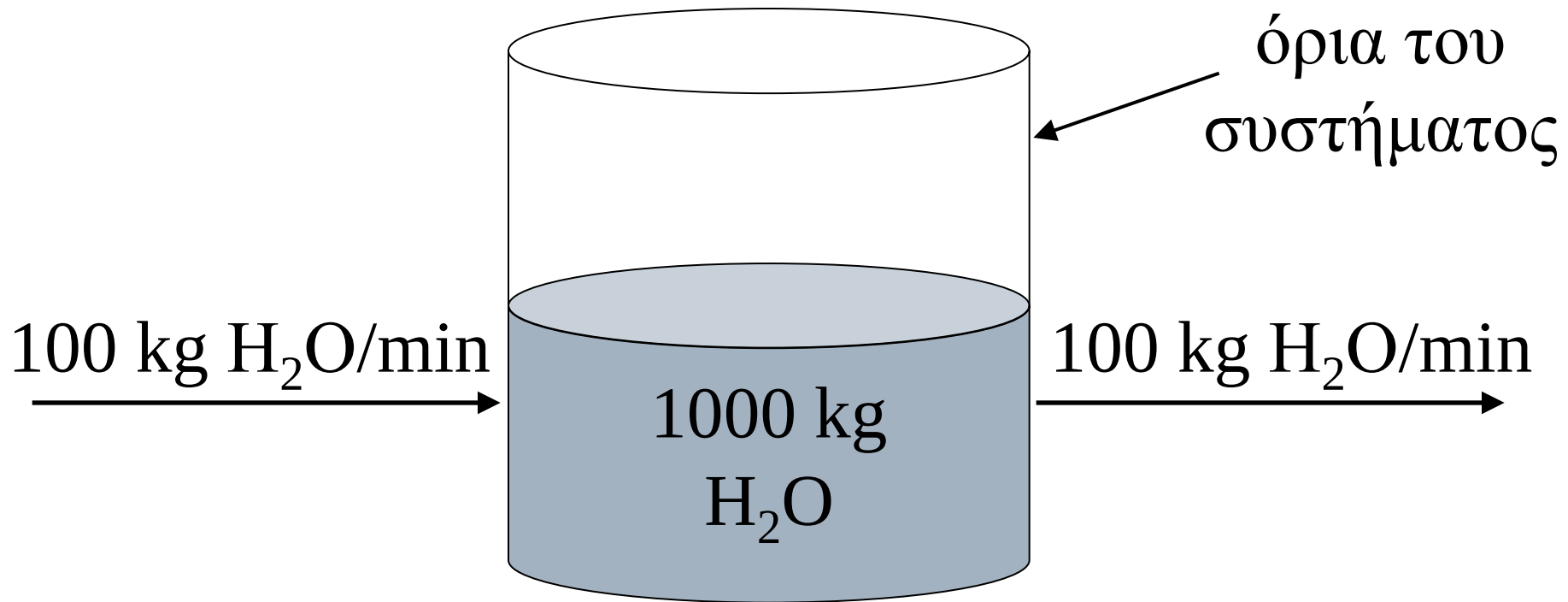




Συστήματα σταθερής κατάστασης

- Τα ανοικτά συστήματα ταξινομούνται περαιτέρω σε:
- **Συστήματα σταθερής κατάστασης (steady-state systems).**
- Τα συστήματα αυτά έχουν τα εξής δύο χαρακτηριστικά:
- ✓ οι συνθήκες μέσα στο σύστημα παραμένουν αμετάβλητες ως προς το χρόνο
- ✓ οι συνθήκες ροής παραμένουν σταθερές ως προς το χρόνο

Ανοικτό σύστημα σταθερής κατάστασης



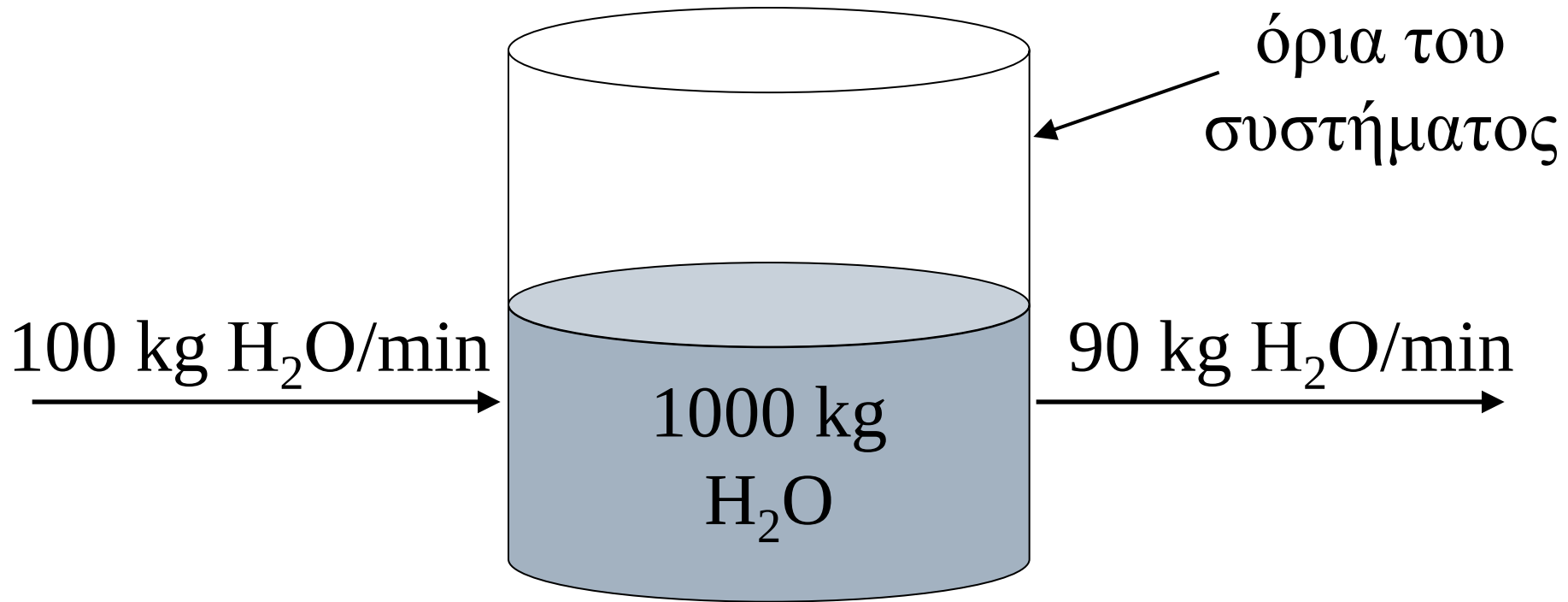
- Στα συστήματα σταθερής κατάστασης, εξ ορισμού, όλες οι συνθήκες μέσα στο σύστημα (θερμοκρασία, πίεση, μάζα των υλικών, ροές, κ.τ.λ.) παραμένουν σταθερές ως προς το χρόνο.



Συστήματα μη σταθερής κατάστασης

- **Συστήματα μη σταθερής κατάστασης (unsteady or non steady-state systems):** Τα συστήματα αυτά έχουν τα εξής δύο χαρακτηριστικά:
 - ✓ όλες οι συνθήκες μέσα στο σύστημα (θερμοκρασία, πίεση, μάζα των υλικών, κ.τ.λ.) δεν παραμένουν σταθερές ως προς το χρόνο
 - ✓ ή/και οι συνθήκες ροής εισόδου και εξόδου δεν παραμένουν σταθερές ως προς το χρόνο

Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης

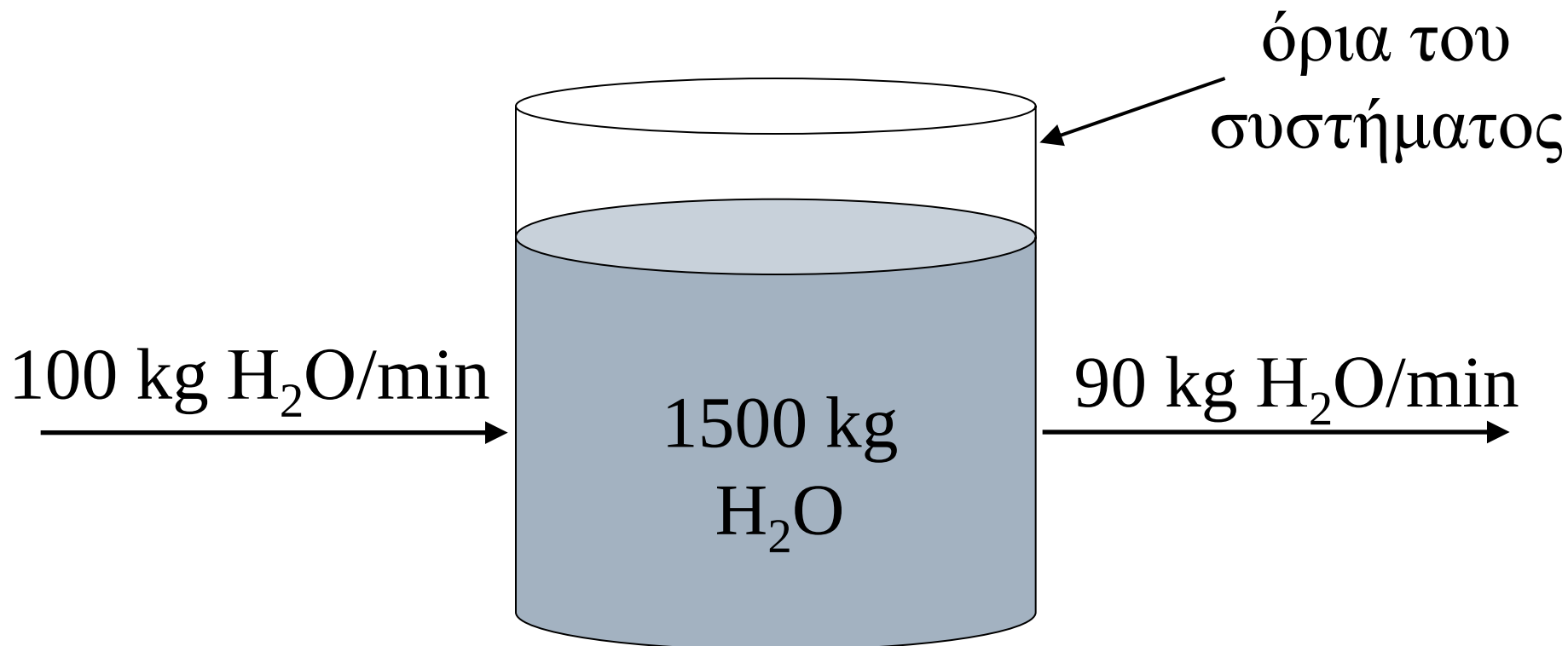


- Το νερό συσσωρεύεται μέσα στα όρια του συστήματος με ρυθμό $100 \text{ kg}/\text{min} - 90 \text{ kg}/\text{min} = 10 \text{ kg}/\text{min}$.

Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης

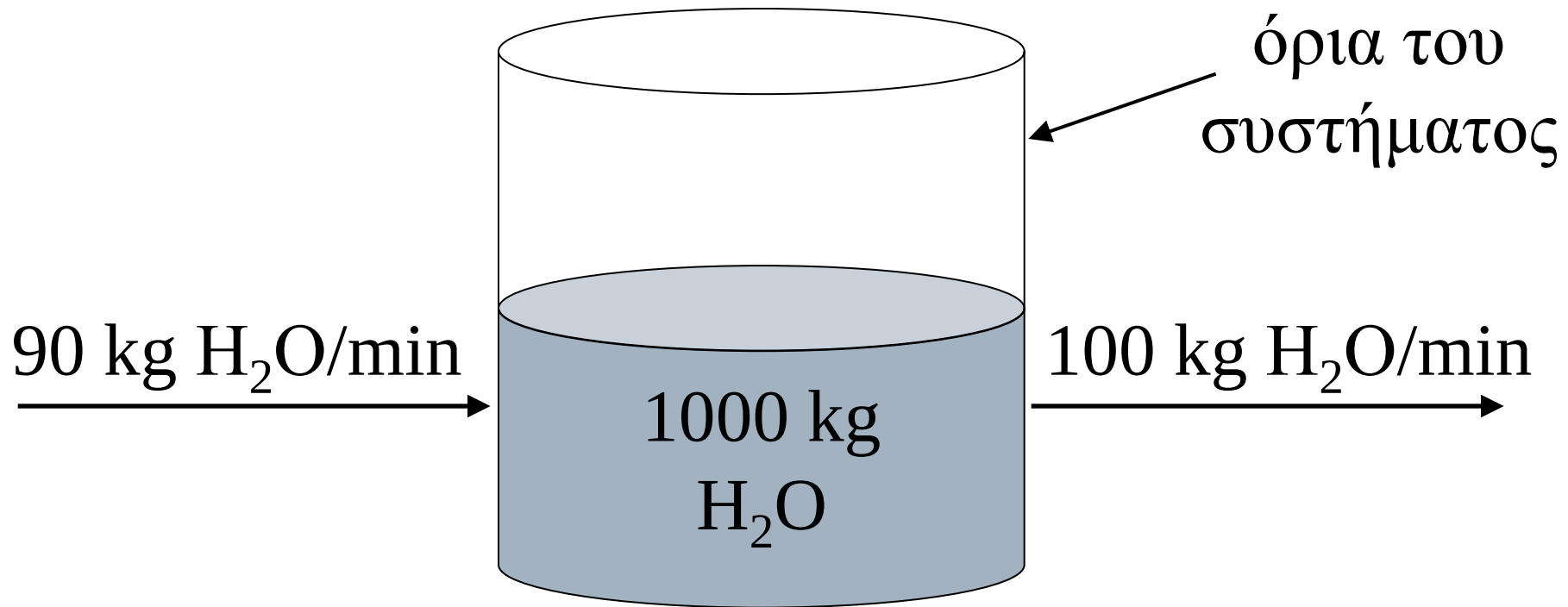


- Μετά από 50 min η μάζα του νερού η οποία έχει συσσωρευτεί μέσα στα όρια του συστήματος είναι: $50 \text{ min} \times 10 \text{ kg/min} = 500 \text{ kg}$ νερού.



Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης

Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης

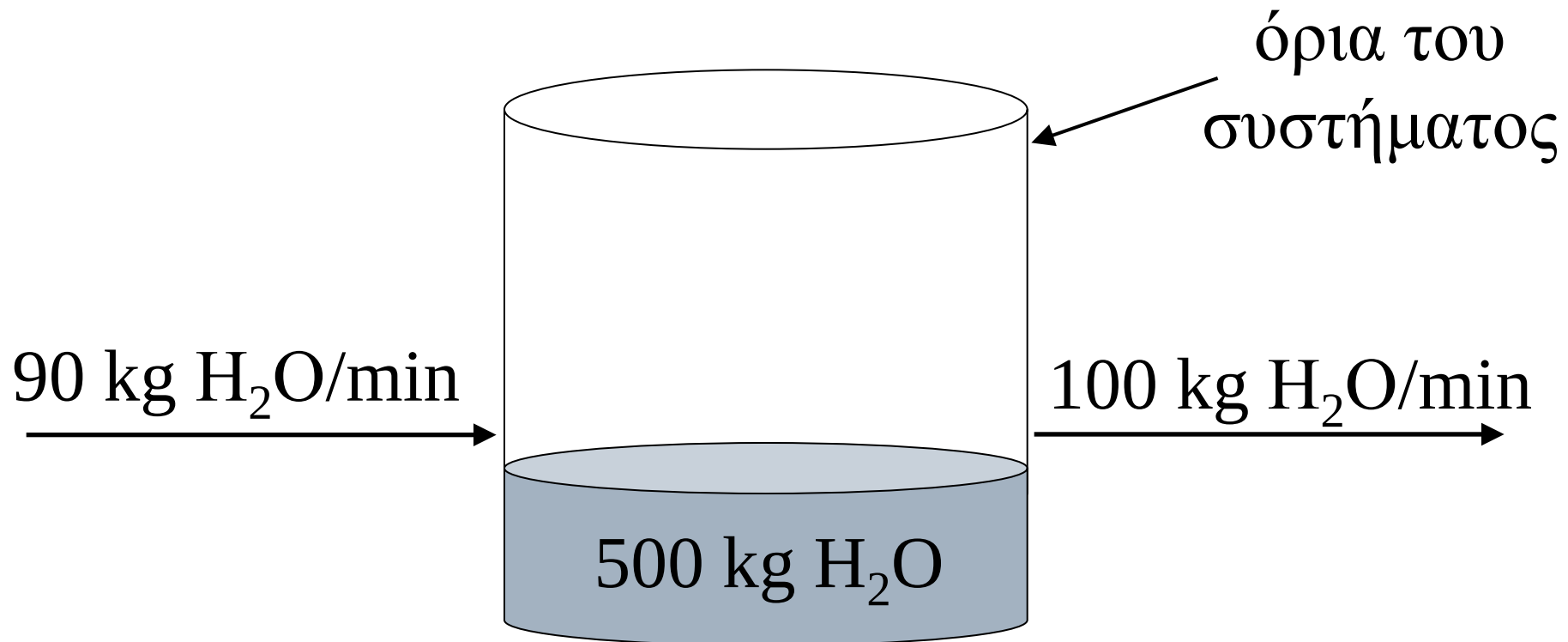


- Η ποσότητα του νερού μειώνεται (αρνητική συσσώρευση) μέσα στα όρια του συστήματος με ρυθμό $90 \text{ kg/min} - 100 \text{ kg/min} = -10 \text{ kg/min}$.

Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης



- Μετά από 50 min η μείωση της μάζας του νερού μέσα στα όρια του συστήματος είναι: $50 \text{ min} \times (-10 \text{ kg/min}) = -500 \text{ kg}$ νερού.



Ανοικτό σύστημα μη σταθερής κατάστασης



Ισοζύγιο μάζας

- Το ισοζύγιο μάζας εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος Δt , από t_1 έως t_2 , δηλαδή $\Delta t = t_2 - t_1$.
- Το ισοζύγιο μάζας μιας ουσίας με λόγια διατυπώνεται ως εξής:
- Η μάζα της ουσίας η οποία βρίσκεται μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t$ ισούται με:
- ✓ τη μάζα της ουσίας η οποία βρισκόταν μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t_1



Ισοζύγιο μάζας

- ✓ συν τη μάζα της ουσίας η οποία εισέρχεται μέσα στα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt
- ✓ πλην τη μάζα της ουσίας η οποία εξέρχεται από τα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt .
- Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στην παρακάτω εξίσωση:

Ισοζύγιο μάζας



➤ Εξίσωση ισοζυγίου μάζας:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{τελική} & & \text{αρχική} & & \text{εισροή μάζας} & & \text{εκροή μάζας} \\ \text{ποσότητα} & = & \text{ποσότητα} & + & \text{κατά το χρονικό} & - & \text{κατά το χρονικό} \\ \text{μάζας} & & \text{μάζας} & & \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t \\ \text{σε χρόνο } t_2 & & \text{σε χρόνο } t_1 & & & & \end{array} \quad (3.5)$$

➤ Κάθε όρος της εξίσωσης (3.5) έχει μονάδες μάζας.



Ισοζύγιο μάζας

- Όμως η συσσώρευση μάζας μέσα στα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt ισούται με:
- ✓ την τελική ποσότητα μάζας η οποία βρίσκεται μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t_2
- ✓ πλην την αρχική ποσότητα μάζας η οποία βρίσκονταν μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t_1

$$\begin{array}{l} \text{συσσώρευση μάζας} \\ \text{κατά το χρονικό} \\ \text{διάστημα } \Delta t \end{array} = \begin{array}{l} \text{τελική} \\ \text{ποσότητα} \\ \text{μάζας σε} \\ \text{χρόνο } t_2 \end{array} - \begin{array}{l} \text{αρχική} \\ \text{ποσότητα} \\ \text{μάζας σε} \\ \text{χρόνο } t_1 \end{array} \quad (3.6)$$

Ισοζύγιο μάζας



- Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.6) στην εξίσωση (3.5) έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} \text{συσσώρευση μάζας} & \text{εισροή μάζας} & \text{εκροή μάζας} & & \\ \text{κατά το χρονικό} & = & \text{κατά το χρονικό} & - & \text{κατά το χρονικό} \\ \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t \end{array} \quad (3.7)$$

- Η εξίσωση (3.5) είναι αντίστοιχη με την εξίσωση (3.1) του χρηματικού ισοζυγίου, ενώ η εξίσωση (3.7) είναι αντίστοιχη με την εξίσωση (3.3).

Ισοζύγιο μάζας



- Κάθε όρος των εξισώσεων (3.5) (3.6) και (3.7) έχει μονάδες μάζας και όχι μονάδες μάζας ανά μονάδα χρόνου.
- Ο 1^{ος} όρος της εξίσωσης (3.7) αντιστοιχεί στη συνολική (αθροιστική) συσσώρευση μάζας μέσα στα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt .



Ισοζύγιο μάζας

- Ομοίως, ο 2^{ος} και ο 3^{ος} όρος της εξίσωσης (3.7) αντιστοιχούν στη συνολική (αθροιστική) εισροή και εκροή μάζας προς και από τα όρια του συστήματος αντίστοιχα, κατά το χρονικό διάστημα Δt .
- Αν το πρόβλημα δίνει τις ροές μάζας ανά μονάδα χρόνου (π.χ. kg/min), τότε αυτές θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με το χρονικό διάστημα Δt ώστε να μετατραπούν σε μονάδες μάζας.



Ισοζύγιο μάζας

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε **σταθερή κατάσταση**, τότε η συσσώρευση μάζας μέσα στα όρια του συστήματος είναι μηδέν, και ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.7) μηδενίζεται.
- Άρα η εξίσωση (3.7) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} \text{εισροή μάζας} & & \text{εκροή μάζας} \\ \text{στο χρονικό} & = & \text{στο χρονικό} \\ \text{διάστημα} & & \text{διάστημα} \\ t_1 \text{ έως } t_2 & & t_1 \text{ έως } t_2 \end{array} \quad (3.8)$$

- ... ή με άλλα λόγια: ότι εισέρχεται μέσα στο σύστημα εξέρχεται.



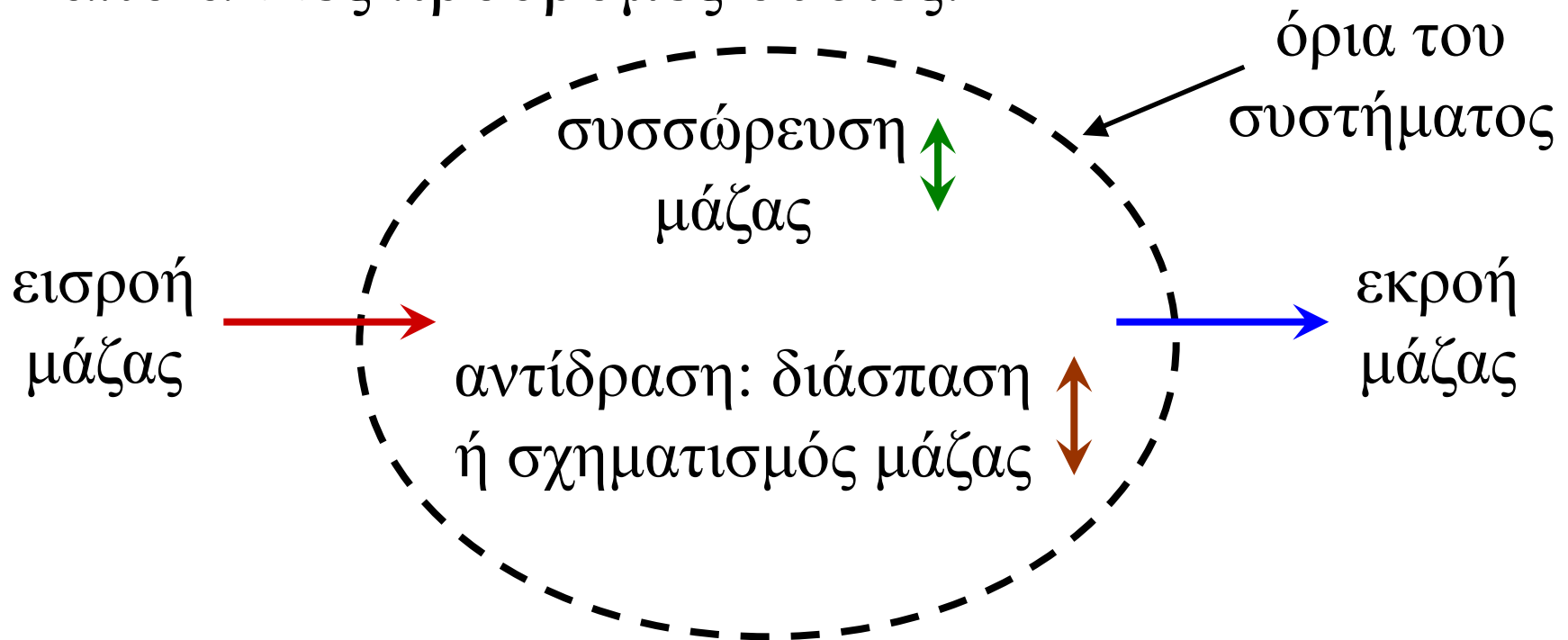
Ισοζύγιο μάζας

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε μη σταθερή κατάσταση, τότε η συσσώρευση μάζας μέσα στα όρια του συστήματος είναι είτε:
 - ✓ θετική, αν η εισροή μάζας κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι μεγαλύτερη από την εκροή
 - ✓ αρνητική, αν η εισροή μάζας κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι μικρότερη από την εκροή.
- **Προσοχή!!!**: έως τώρα δεν έχουμε λάβει υπόψη την τυχόν πραγματοποίηση χημικών αντιδράσεων μέσα στα όρια του συστήματος, οι οποίες συνεπάγονται παραγωγή ή κατανάλωση μάζας.

Ισοζύγιο μάζας



- Συχνά στα περιβαλλοντικά συστήματα λαμβάνουν χώρα χημικές ή/και βιολογικές αντιδράσεις, στις οποίες μία ουσία είτε διασπάται προς άλλες ουσίες, είτε σχηματίζεται από άλλες πρόδρομες ουσίες.



Ισοζύγιο μάζας



- Μια χημική ουσία η οποία εισέρχεται στο σύστημα έχει τις εξής 4 δυνατότητες:
 1. να εξέλθει από το σύστημα χωρίς να υποστεί αλλαγές
 2. να συσσωρευτεί μέσα στα όρια του συστήματος
 3. να μετατραπεί σε άλλες ουσίες μέσω χημικών ή/και βιολογικών αντιδράσεων
 4. να σχηματιστεί από άλλες ουσίες μέσω χημικών ή/και βιολογικών αντιδράσεων
- Συνήθως οι περιπτώσεις 3 και 4 εξετάζονται μαζί και αναφέρονται ως «αντιδράσεις».



- Κατά συνέπεια, το ισοζύγιο μάζας της ουσίας πρέπει να συμπληρωθεί, ώστε να λάβει υπόψη τις αντιδράσεις διάσπασης ή σχηματισμού οι οποίες λαμβάνουν χώρα μέσα στα όρια του συστήματος.
- Οι μεταβολές της μάζας μέσα στα όρια του περιβαλλοντικού συστήματος λόγω χημικών ή/και βιολογικών αντιδράσεων αντιστοιχούν με τους τόκους (αντιδράσεις σχηματισμού) και τους φόρους (αντιδράσεις διάσπασης) του χρηματικού ισοζυγίου.



Ισοζύγιο μάζας

- Κατά συνέπεια, το πλήρες ισοζύγιο μάζας μιας ουσίας με λόγια διατυπώνεται ως εξής:
- Η μάζα της ουσίας η οποία βρίσκεται μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t$ ισούται με:
- ✓ τη μάζα της ουσίας η οποία βρισκόταν μέσα στα όρια του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t_1
- ✓ συν τη μάζα της ουσίας η οποία εισέρχεται μέσα στα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt

Ισοζύγιο μάζας



- ✓ μείον τη μάζα της ουσίας η οποία εξέρχεται από τα όρια του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt
- ✓ συν ή πλην τη μάζα της ουσίας η οποία σχηματίζεται από άλλες χημικές ουσίες ή διασπάται προς άλλες χημικές ουσίες αντίστοιχα, μέσα στα όρια του συστήματος, κατά το χρονικό διάστημα Δt .
- Κατά συνέπεια, η εξίσωση (3.7) συμπληρώνεται ως εξής:

Ισοζύγιο μάζας



$$\begin{aligned} &\text{συσσώρευση μάζας} && \text{εισροή μάζας} && \text{εκροή μάζας} \\ &\text{κατά το χρονικό} && \text{κατά το χρονικό} && \text{κατά το χρονικό} \\ &\text{διάστημα } \Delta t && \text{διάστημα } \Delta t && \text{διάστημα } \Delta t \\ &&& \pm && \text{μάζα η οποία σχηματίζεται} \\ &&& && \text{ή διασπάται κατά το} \\ &&& && \text{χρονικό διάστημα } \Delta t \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Κάθε όρος της εξίσωσης (3.9) έχει μονάδες μάζας.

Ισοζύγιο μάζας



- Η εξίσωση (3.9) είναι περισσότερο χρήσιμη όταν είναι ξεκάθαρο πότε ξεκινάει και πότε τελειώνει η χρονική περίοδος κατά την οποία εφαρμόζεται το ισοζύγιο μάζας, π.χ. διάστημα μιας ώρας, μιας ημέρας, μιας εβδομάδας, ενός μήνα, ενός έτους, κ.τ.λ.
- Ωστόσο, στα περιβαλλοντικά προβλήματα είναι συχνά πιο βολικό και πιο χρήσιμο να δουλεύουμε με **ροές μάζας (mass flux)**, δηλαδή με τη **μεταβολή της μάζας στη μονάδα του χρόνου (ρυθμός μεταβολής της μάζας)**.

Ισοζύγιο μάζας



➤ Η εξίσωση (3.9) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{\text{συσσώρευση μάζας}}{\text{κατά το χρονικό}} \frac{\text{διάστημα } \Delta t}{\Delta t} = \frac{\text{εισροή μάζας}}{\text{κατά το χρονικό}} \frac{\text{διάστημα } \Delta t}{\Delta t} - \frac{\text{εκροή μάζας}}{\text{κατά το χρονικό}} \frac{\text{διάστημα } \Delta t}{\Delta t}$$

μάζα η οποία σχηματίζεται
ή διασπάται κατά το
 $\pm \frac{\text{χρονικό διάστημα } \Delta t}{\Delta t}$ (3.10)

Ισοζύγιο μάζας



- Όλοι οι όροι της εξίσωσης (3.10) έχουν μονάδες **μάζα/χρόνος**, είναι δηλαδή ρυθμός μεταβολής της μάζας λόγω:
 - ✓ συσσώρευσης της μάζας μέσα στα όρια του συστήματος (αριστερός όρος της εξίσωσης)
 - ✓ εισροής της μάζας προς το σύστημα (1^{ος} όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης)
 - ✓ εκροής της μάζας από το σύστημα (2^{ος} όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης)



Ισοζύγιο μάζας

- ✓ μεταβολής της μάζας η οποία οφείλεται σε χημική ή/και βιολογική αντίδραση μέσα στα όρια του συστήματος (3^{ος} όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης)
- Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς για καθέναν από τους όρους της εξίσωσης (3.10):
- Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.10) συμβολίζεται με $\Delta m / \Delta t$ και αντιστοιχεί στο **ρυθμό συσσώρευσης (accumulation rate)** της μάζας μέσα στα όρια του συστήματος.



Ισοζύγιο μάζας

- Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.10) συμβολίζεται με $\Delta m_{in}/\Delta t$ και αντιστοιχεί στο **ρυθμό εισόδου (input rate)** της μάζας μέσα στα όρια του συστήματος.
- Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (3.10) συμβολίζεται με $\Delta m_{out}/\Delta t$ και αντιστοιχεί στο **ρυθμό εξόδου (output rate)** της μάζας από τα όρια του συστήματος.



Ισοζύγιο μάζας

- Ο τρίτος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (3.10) συμβολίζεται με $\Delta \mathbf{m}_{\text{reaction}} / \Delta t$ και αντιστοιχεί στο **ρυθμό** μεταβολής της μάζας μέσα στα όρια του συστήματος λόγω χημικής ή/και βιολογικής **αντίδρασης (reaction rate)**.
- Η αντίδραση μπορεί να είναι αντίδραση σχηματισμού ή διάσπασης της ουσίας.
- Ο ρυθμός αντίδρασης είναι θετικός όταν ο ρυθμός σχηματισμού της ουσίας είναι πιο γρήγορος από το ρυθμό διάσπασής της.

Ισοζύγιο μάζας



- Στην αντίθετη περίπτωση, ο ρυθμός αντίδρασης είναι αρνητικός.
- Ομοίως, ο ρυθμός συσσώρευσης είναι θετικός όταν αυξάνεται η μάζα της ουσίας ως προς το χρόνο μέσα στα όρια του συστήματος.
- Αντίθετα, όταν μειώνεται η μάζα της ουσίας ως προς το χρόνο, μέσα στα όρια του συστήματος, τότε ο ρυθμός συσσώρευσης είναι αρνητικός.



Ισοζύγιο μάζας

- Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς, η εξίσωση του ισοζυγίου μάζας γράφεται ως εξής:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

- Όταν το $\Delta t \rightarrow 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{\text{in}}}{dt} - \frac{dm_{\text{out}}}{dt} \pm \frac{dm_{\text{reaction}}}{dt} \quad (3.12)$$



Ισοζύγιο μάζας

- Η παραπάνω εξίσωση είναι η **βασική εξίσωση του ισοζυγίου μάζας** η οποία χρησιμοποιείται εκτενώς στη μηχανική περιβάλλοντος.
- Κάθε όρος της εξίσωσης (3.12) εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής της μάζας**.
- Κατά συνέπεια η παραπάνω εξίσωση θα έπρεπε να ονομάζεται εξίσωση **ισοζυγίου του ρυθμού μεταβολής της μάζας (mass rate balance)**.
- Ωστόσο, για λόγους απλότητας έχει επικρατήσει ο όρος «**ισοζύγιο μάζας (mass balance)**».



Ισοζύγιο μάζας

- Συνήθως ένας από τους παραπάνω όρους της εξίσωσης είναι άγνωστος, οπότε το τελευταίο βήμα είναι να λύσουμε την εξίσωση ως προς αυτόν τον άγνωστο όρο.

Στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων



- Για την επίλυση των προβλημάτων με τα ισοζύγια μάζας προτείνεται η ακόλουθη στρατηγική:
 1. Διαβάστε και κατανοήστε το πρόβλημα ώστε να γνωρίζετε επακριβώς ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα.
 2. Κάντε ένα σχεδιάγραμμα της διεργασίας και καθορίστε τα όρια του συστήματος.
 3. Τοποθετήστε στο διάγραμμα τα σύμβολα, τις τιμές και τις μονάδες των γνωστών μεγεθών (ροές, υλικά και συστάσεις). Για τα άγνωστα μεγέθη γράψτε τα σύμβολα και τις μονάδες τους.

Στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων



4. Βρείτε ότι τυχόν επιπλέον στοιχεία απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος, τα οποία λείπουν από την εκφώνηση.
5. Επιλέξτε μία βάση για τους υπολογισμούς σας με βάση είτε τα δεδομένα, είτε τα ζητούμενα, είτε με ότι άλλο ενδεχομένως είναι βολικό για να λύσετε το πρόβλημα.
6. Προσδιορίστε τον αριθμό των μεταβλητών των οποίων οι τιμές είναι άγνωστες.
7. Προσδιορίστε τον αριθμό των εξισώσεων οι οποίες απαιτούνται για τη λύση του προβλήματος.

Στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων



8. Γράψτε τις εξισώσεις οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος.
9. Λύστε τις εξισώσεις.
10. Ελέγχετε τις απαντήσεις σας!!!

Άσκηση 3.3



- Ένα ζευγάρι, ο Ανδρέας και η Μαρία, αγοράζουν και φέρνουν στο σπίτι τους κάθε εβδομάδα, κατά μέσο όρο, περίπου 50 kg καταναλωτικά αγαθά (τρόφιμα, βιβλία, περιοδικά, εφημερίδες, οικιακές συσκευές, έπιπλα, και τα συνοδευτικά υλικά συσκευασίας).
- Από αυτήν την ποσότητα, το 50% είναι τρόφιμα τα οποία καταναλώνει το ζευγάρι, ενώ περίπου 1 kg καταναλωτικών αγαθών συσσωρεύεται στο σπίτι τους κάθε εβδομάδα.

Άσκηση 3.3



- Επίσης, ο Ανδρέας και η Μαρία ανακυκλώνουν περίπου το 25% των στερεών απορριμμάτων του σπιτιού.
- Να υπολογίσετε την ποσότητα των στερεών μη ανακυκλώσιμων απορριμμάτων τα οποία ο Ανδρέας και η Μαρία τοποθετούν στους κοινούς κάδους απορριμμάτων κάθε εβδομάδα.

Άσκηση 3.3

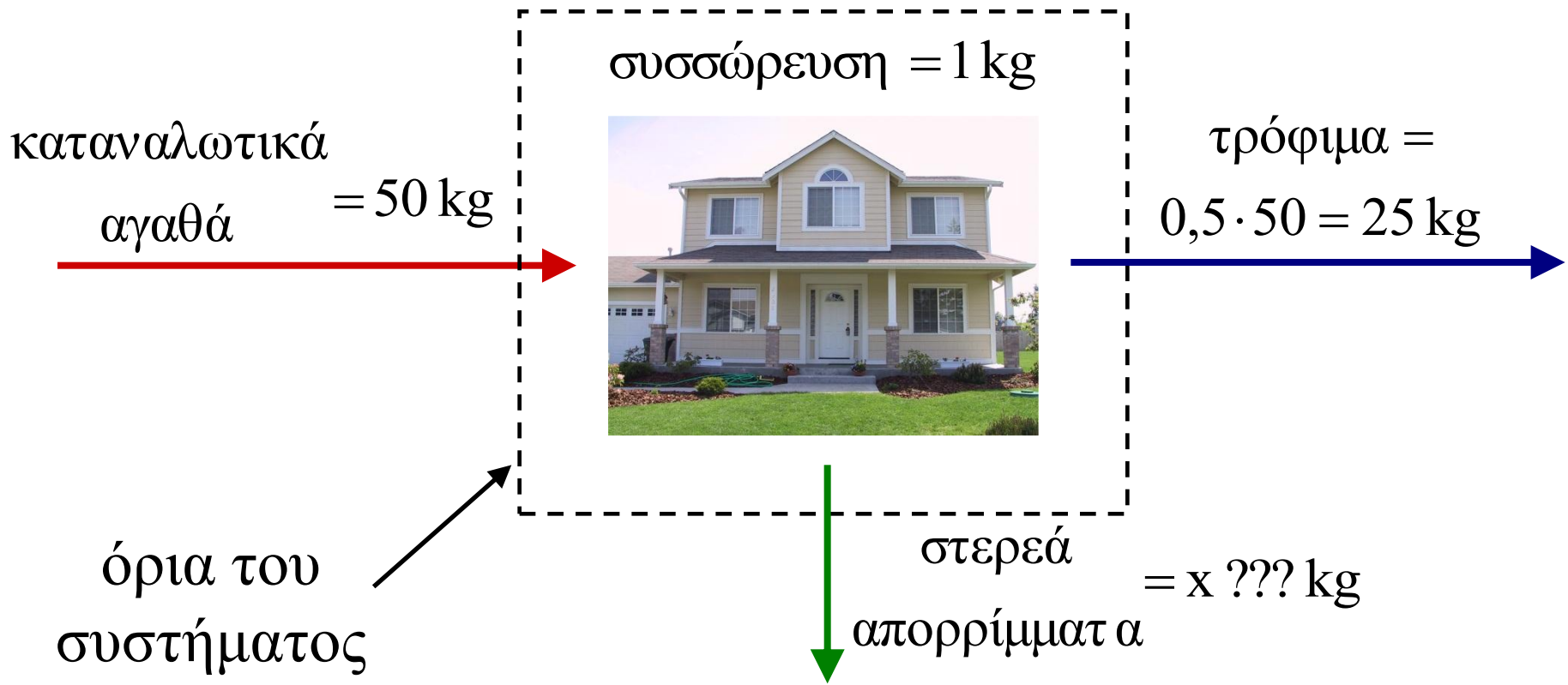


- Επίσης, ο Ανδρέας και η Μαρία ανακυκλώνουν περίπου το 25% των στερεών απορριμμάτων του σπιτιού.
- Να υπολογίσετε την ποσότητα των στερεών μη ανακυκλώσιμων απορριμμάτων τα οποία ο Ανδρέας και η Μαρία τοποθετούν στους κοινούς κάδους απορριμμάτων κάθε εβδομάδα.

Άσκηση 3.3: Απάντηση



- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας του σπιτιού για χρονικό διάστημα 1 εβδομάδας:





Άσκηση 3.3: Απάντηση

- Εφαρμόζουμε την εξίσωση (3.7) για χρονικό διάστημα 1 εβδομάδας:

$$\begin{array}{ccccc} \text{συσσώρευση μάζας} & \text{εισροή μάζας} & \text{εκροή μάζας} & & \\ \text{κατά το χρονικό} & = & \text{κατά το χρονικό} & - & \text{κατά το χρονικό} \\ \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t \end{array} \quad (3.7)$$

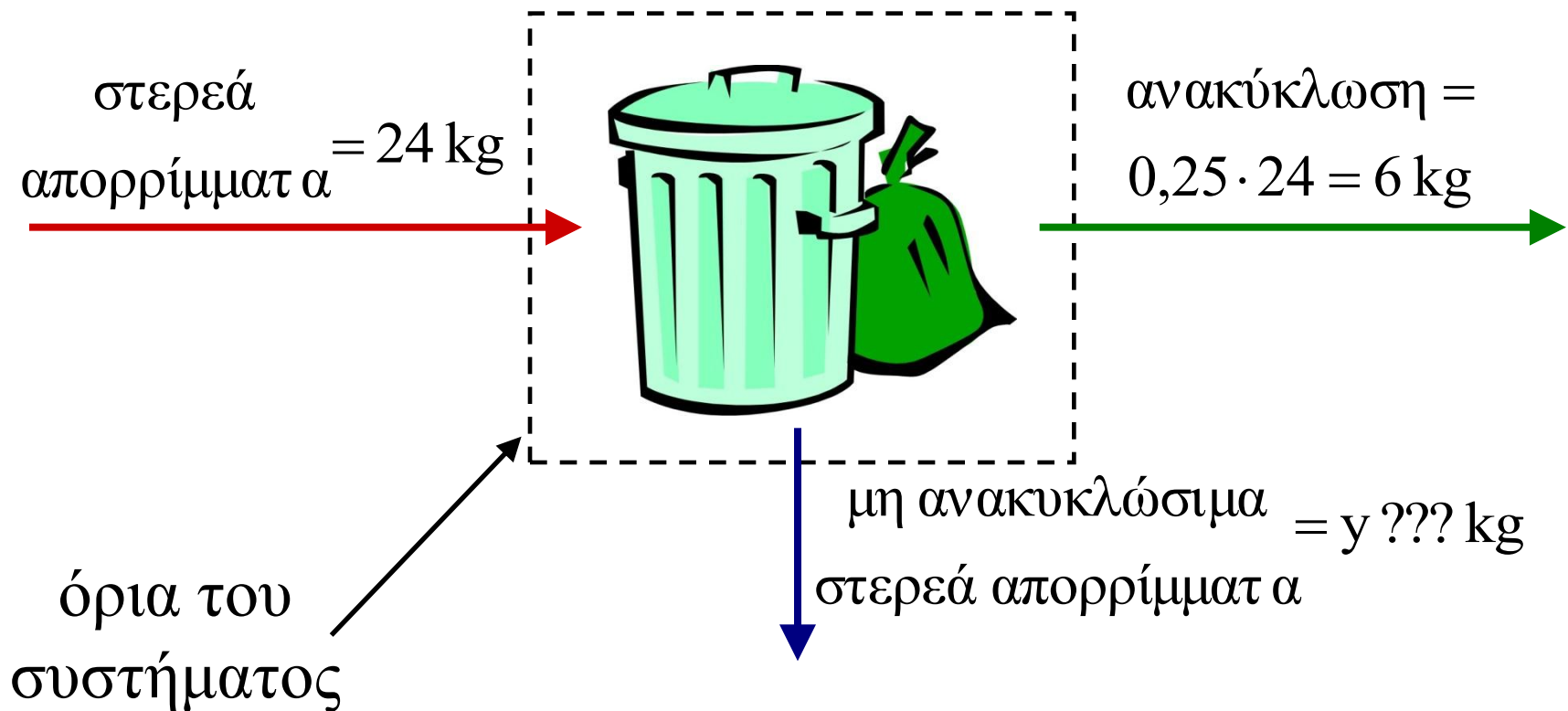
$$1 = 50 - (25 + x) \Leftrightarrow x = 50 - 25 - 1 = 24 \text{ kg}$$

- Άρα ο Ανδρέας και η Μαρία πετάνε κάθε εβδομάδα 24 kg στερεών απορριμμάτων

Άσκηση 3.3: Απάντηση



- Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας των στερεών απορριμμάτων:





Άσκηση 3.3: Απάντηση

- Ισοζύγιο μάζας των στερεών απορριμμάτων:

$$\begin{array}{ccccc} & & = 0 & & \\ \text{συσσώρευση μάζας} & \text{εισροή μάζας} & & \text{εκροή μάζας} & \\ \text{κατά το χρονικό} & = \text{κατά το χρονικό} - \text{κατά το χρονικό} & & & (3.7) \\ \text{διάστημα } \Delta t & \text{διάστημα } \Delta t & & \text{διάστημα } \Delta t & \end{array}$$

$$0 = 24 - (6 + y) \Leftrightarrow y = 24 - 6 = 18 \text{ kg}$$

- Άρα ο Ανδρέας και η Μαρία πετάνε κάθε εβδομάδα 18 kg στερεών μη ανακυκλώσιμων απορριμμάτων.

Άσκηση 3.4



- Η Μαρία γεμίζει την μπανιέρα της με νερό για να κάνει μπάνιο αλλά ξέχασε να τοποθετήσει το πώμα στον πυθμένα της μπανιέρας.
- Ο όγκος της μπανιέρας είναι 360,0 L η ροή του νερού της βρύσης είναι 11,32 L/min και η ροή της αποχέτευσης της μπανιέρας είναι 8,32 L/min.
- i. Σε πόση ώρα θα γεμίσει η μπανιέρα με νερό;

Άσκηση 3.4



- Η Μαρία κλείνει τη βρύση μόλις γεμίσει η μπανιέρα, ώστε να μην πλημμυρίσει το σπίτι της!
- ii. Πόσο νερό σπατάλησε η Μαρία μέχρι να γεμίσει την μπανιέρα της;
- iii. Σε πόση ώρα θα αδειάσει η μπανιέρα μόλις η Μαρία κλείσει τη βρύση;
- iv. Σε πόση ώρα θα γέμιζε η μπανιέρα αν η Μαρία είχε τοποθετήσει το πώμα;

Άσκηση 3.4: Απάντηση

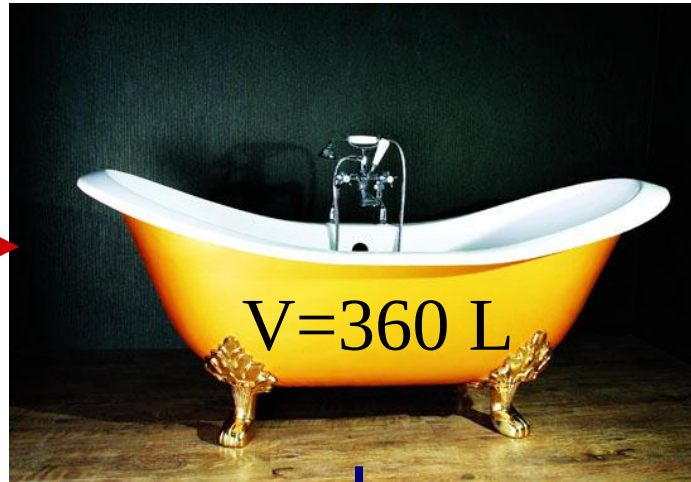


- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας για το νερό της μπανιέρας:

Ρυθμός συσσώρευσης = ?

Ρυθμός εισόδου

$$Q_{V,in} = 11,32 \text{ L/min}$$



Ρυθμός εξόδου

$$Q_{V,out} = 8,32 \text{ L/min}$$

Άσκηση 3.4: Απάντηση



- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας για το νερό της μπανιέρας:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} = 0 \quad (3.11) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\rho \cdot V)}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{in}})}{\Delta t} - \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{out}})}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow Q_V = Q_{V,\text{in}} - Q_{V,\text{out}} \Leftrightarrow$$

$$Q_V = 11,32 - 8,32 = 3,00 \text{ L/min}$$

Άσκηση 3.4: Απάντηση



- i. Από τον τύπο της ογκομετρικής ταχύτητας ροής λύνοντας ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$Q_V = \frac{V}{t} \Leftrightarrow t = \frac{V}{Q_V} = \frac{360,0 \text{ L}}{3,00 \text{ L/min}} = 1,20 \cdot 10^2 \text{ min}$$

- Δηλαδή η μπανιέρα θα γεμίσει σε 2 ώρες!!!
- ii. Το νερό το οποίο σπατάλησε η Μαρία μέχρι να γεμίσει την μπανιέρα της είναι το νερό το οποίο έτρεχε από την αποχέτευση της μπανιέρας για όσο χρόνο χρειάστηκε μέχρι να γεμίσει.



Άσκηση 3.4: Απάντηση

- Άρα λοιπόν από τον τύπο της ογκομετρικής ταχύτητας ροής λύνοντας ως προς τον όγκο και αντικαθιστώντας την παροχή της αποχέτευσης της μπανιέρας έχουμε:

$$Q_{V,out} = \frac{V_{out}}{t} \Leftrightarrow V_{out} = Q_{V,out} \cdot t = 8,32 \text{ L/min} \cdot 120 \text{ min} = 998 \text{ L}$$

- Δηλαδή η Μαρία ξόδεψε σχεδόν 1 m^3 νερού για να γεμίσει την μπανιέρα της!!!



Άσκηση 3.4: Απάντηση

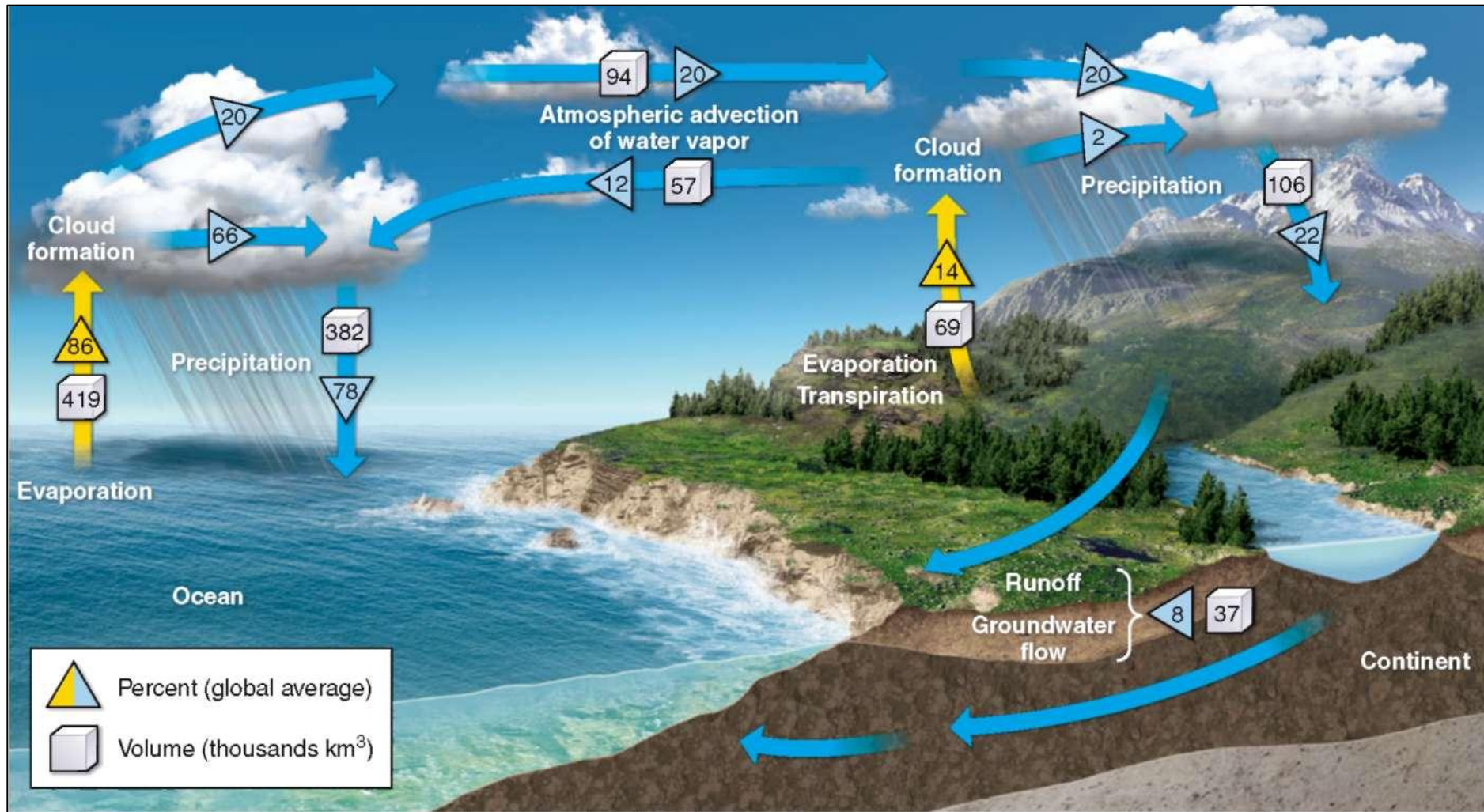
iii. Μόλις η Μαρία κλείσει τη βρύση η μπανιέρα θα αδειάσει σε χρόνο:

$$Q_{V,out} = \frac{V}{t} \Leftrightarrow t = \frac{V}{Q_{V,out}} = \frac{360,0 \text{ L}}{8,32 \text{ L/min}} = 43,3 \text{ min}$$

iv. Αν η Μαρία είχε τοποθετήσει το πώμα η μπανιέρα θα γέμιζε σε χρόνο:

$$Q_{V,in} = \frac{V}{t} \Leftrightarrow t = \frac{V}{Q_{V,in}} = \frac{360,0 \text{ L}}{11,32 \text{ L/min}} = 31,80 \text{ min}$$

Υδρολογικός κύκλος (hydrologic cycle)



Σχήμα 3.1

Οι τιμές όγκου (volume) αντιστοιχούν σε χιλιάδες km³ το χρόνο ⁷⁵

Υδρολογικός κύκλος



- Υπό την επίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας το νερό των θαλασσών και των ωκεανών, καθώς και το νερό των ηπείρων (λίμνες, ποτάμια, έδαφος) εξατμίζεται (**εξαάτμιση, evaporation**) και δίνει υδρατμούς οι οποίοι μεταβαίνουν στην ατμόσφαιρα.
- Οι υδρατμοί της ατμόσφαιρας συμπυκνώνονται και σχηματίζουν σύννεφα τα οποία δίνουν βροχή, χιόνι, χαλάζι, χιονόνερο (**κατακρήμνιση = precipitation**).

Υδρολογικός κύκλος



$$\text{εξάτμιση} = 419.000 + 69.000 = 488.000 \text{ km}^3/\text{y}$$

- Εξάτμιση: συνολικά $488.000 \text{ km}^3/\text{y}$
- ✓ από τις θάλασσες και τους ωκεανούς: $419.000 \text{ km}^3/\text{y}$ (αντιστοιχούν στο 86% του συνολικού όγκου του εξατμιζόμενου νερού)
- ✓ από την ηπειρωτική επιφάνεια της Γης (λίμνες, ποτάμια, έδαφος, φύλλα φυτών): $69.000 \text{ km}^3/\text{y}$ (αντιστοιχούν στο 14% του συνολικού όγκου του εξατμιζόμενου νερού).

Υδρολογικός κύκλος



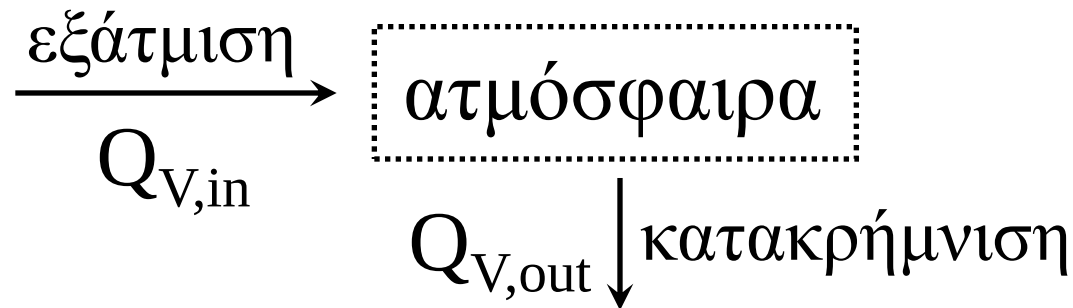
$$\text{κατακρήμνιση} = 382.000 + 106.000 = 488.000 \text{ km}^3/\text{y}$$

- Κατακρήμνιση: συνολικά $488.000 \text{ km}^3/\text{y}$
- ✓ στις θάλασσες και τους ωκεανούς: $382.000 \text{ km}^3/\text{y}$ (αντιστοιχούν στο 78% του συνολικού όγκου του κατακρημνιζόμενου νερού)
- ✓ στην ηπειρωτική επιφάνεια της Γης: $106.000 \text{ km}^3/\text{y}$ (αντιστοιχούν στο 22% του συνολικού όγκου του κατακρημνιζόμενου νερού)



Ισοζύγιο μάζας του νερού της ατμόσφαιρας

- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας (εξίσωση 3.11) για το νερό της ατμόσφαιρας:



- Θεωρούμε ότι το σύστημα (ατμόσφαιρα) βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση, δηλαδή δε συσσωρεύεται νερό στην ατμόσφαιρα.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{in}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{out}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{reaction}}{\Delta t} \quad (3.11)$$



Ισοζύγιο μάζας του νερού της ατμόσφαιρας

$$\frac{\Delta m_{in}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{out}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\rho \cdot V_{in})}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{out})}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\rho \frac{\Delta V_{in}}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V_{out}}{\Delta t} \Leftrightarrow Q_{V,in} = Q_{V,out} \Leftrightarrow$$

$$419.000 + 69.000 = 382.000 + 106.000 \Leftrightarrow$$

$$488.000 \text{ km}^3/\text{y} = 488.000 \text{ km}^3/\text{y}$$

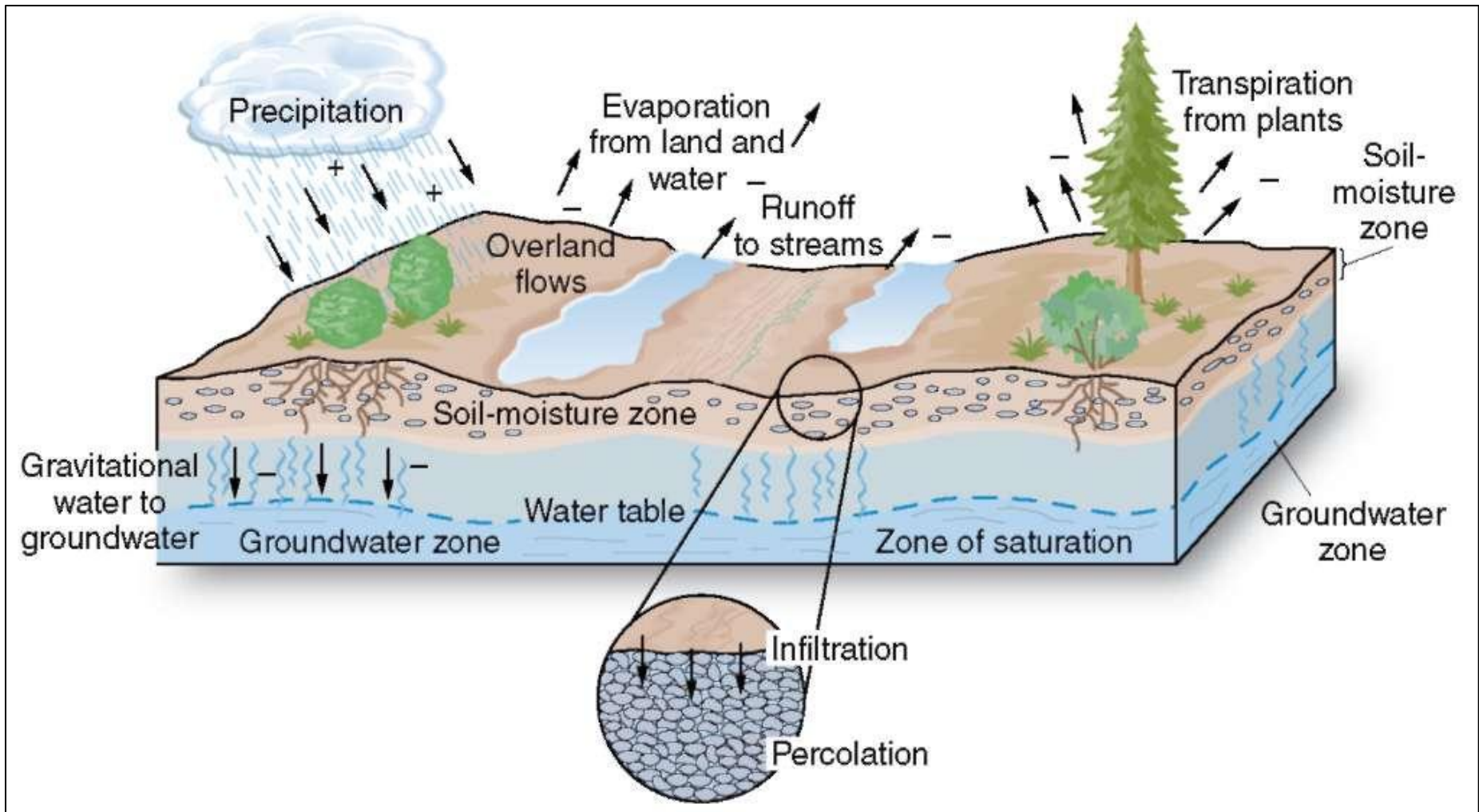
- Δηλαδή επιβεβαιώνεται το ισοζύγιο μάζας του νερού της ατμόσφαιρας και η υπόθεση ότι το σύστημα είναι σε σταθερή κατάσταση.

Υδρολογικός κύκλος



- Ο συνολικός όγκος των κατακρημνισμάτων στην ηπειρωτική επιφάνεια της Γης ισούται με 106.000 km^3 νερού το χρόνο (αντιστοιχούν στο 22% του συνολικού όγκου του κατακρημνιζόμενου νερού)
- Από αυτά:
 - ✓ $94.000 \text{ km}^3/\text{y}$ προέρχονται από το εξατμιζόμενο νερό των ωκεανών
 - ✓ $12.000 \text{ km}^3/\text{y}$ προέρχονται από το εξατμιζόμενο νερό της ηπειρωτικής επιφάνειας της Γης.

Νερό των ηπείρων





Νερό των ηπείρων

- Το νερό της βροχής το οποίο φθάνει στην ηπειρωτική επιφάνεια της Γης ακολουθεί δύο βασικές οδούς:
 - i. είτε ρέει επιφανειακά (επιφανειακή απορροή, surface runoff) και σχηματίζει έτσι τα ποτάμια και τις λίμνες.
 - ii. είτε διαποτίζει το έδαφος (διήθηση, infiltration and percolation) και σχηματίζει έτσι την υγρασία του εδάφους (soil moisture) και τα υπόγεια νερά (groundwater).

Υπόγεια νερά



- Μέρος της υγρασίας του εδάφους και των υπογείων νερών εξατμίζεται μέσω της επιφάνειας του εδάφους και επιστρέφει στην ατμόσφαιρα.
- Ένα άλλο μέρος απορροφάται από τις ρίζες των φυτών και μεταφέρεται στα φύλλα, από όπου με την διαπνοή (transpiration) επιστρέφει στην ατμόσφαιρα.
- Συχνά η εξάτμιση και η διαπνοή αναφέρονται με τον όρο εξατμισοδιαπνοή (evapotranspiration).

Υπόγεια νερά



- Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος των υπογείων υδάτων ρέει αργά κάτω από το έδαφος.
- Ο χρόνος παραμονής του νερού στους υπόγειους ταμιευτήρες είναι συνήθως πολύ μεγάλος.
- Τελικά όμως τα υπόγεια νερά είτε επιστρέφουν στην επιφάνεια της Γης με φυσικούς (πηγές, λίμνες, ποτάμια) και τεχνικούς τρόπους (πηγάδια, γεωτρήσεις) είτε ρέουν υπόγεια προς τις θάλασσες και τους ωκεανούς.



Επιφανειακά νερά

- Η ποσότητα των επιφανειακών νερών η οποία δεν διεισδύει στο έδαφος:
 - ✓ είτε εξατμίζεται προς την ατμόσφαιρα
 - ✓ είτε ρέει επιφανειακά προς τις θάλασσες και τους ωκεανούς.
- Μια ποσότητα των επιφανειακών υδάτων αποθηκεύεται για μικρά ή μεγάλα χρονικά διαστήματα στα χιόνια, στους παγετώνες και στις λίμνες.
- Τελικά όμως και η ποσότητα αυτή καταλήγει είτε στην ατμόσφαιρα, είτε στις επιφανειακές απορροές είτε στα υπόγεια νερά.

Υδρολογικός κύκλος



- Από τα 106.000 km^3 νερού το χρόνο των κατακρημνισμάτων στην ηπειρωτική επιφάνεια της Γης:
- ✓ τα $69.000 \text{ km}^3/\text{y}$ εξατμίζονται και μεταβαίνουν στην ατμόσφαιρα
- ✓ τα $37.000 \text{ km}^3/\text{y}$ καταλήγουν στους ωκεανούς είτε μέσω επιφανειακής απορροής είτε μέσω της ροής των υπογείων υδάτων.



- κατακρήμνιση $Q_{V,in}$ $\rightarrow$ ήπειροι $\rightarrow$ επιφανειακές και υπόγειες απορροές $Q_{V,out2}$
 $Q_{V,out1}$ $\downarrow$ εξάτμιση και διαπνοή

- $$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Ισοζύγιο μάζας του νερού των ηπείρων



$$\frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{in}})}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{out}})}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\rho \frac{\Delta V_{\text{in}}}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow Q_{V,\text{in}}^{\text{ολικό}} = Q_{V,\text{out}}^{\text{ολικό}} \Leftrightarrow$$

$$94.000 + 12.000 = 69.000 + 37.000 \Leftrightarrow$$

$$106.000 \text{ km}^3/\text{y} = 106.000 \text{ km}^3/\text{y}$$

- Δηλαδή επιβεβαιώνεται το ισοζύγιο μάζας του νερού των ηπείρων και η υπόθεση ότι το σύστημα είναι σε σταθερή κατάσταση.

Άσκηση 3.5



- Με βάση το σχήμα 3.1 να γράψετε το ισοζύγιο μάζας του νερού των ωκεανών.



Άσκηση 3.6

- Μια αγροτική περιοχή έχει έκταση $8,0 \text{ km}^2$. Στην περιοχή αυτή η μέση ετήσια βροχόπτωση είναι 1020 mm στήλης νερού.
- Το 50% του νερού της βροχής διεισδύει μέσα στο έδαφος και εμπλουτίζει τα υπόγεια νερά της περιοχής, ενώ το υπόλοιπο καταλήγει μέσω επιφανειακών απορροών στη θάλασσα.



Βροχόμετρο
(rain gauge)

Άσκηση 3.6



- Οι αγρότες της περιοχής αντλούν νερό μέσω γεωτρήσεων και πηγαδιών από τα υπόγεια νερά της περιοχής για την άρδευση των καλλιεργειών τους.
- Το νερό αυτό το οποίο αντλείται, σε ποσοστό 80% καταλήγει στην ατμόσφαιρα μέσω εξάτμισης και διαπνοής, ενώ το υπόλοιπο καταλήγει πίσω στα υπόγεια νερά.
- Πόσο νερό ανά έτος μπορούν να αντλούν οι αγρότες της περιοχής από τα υπόγεια νερά χωρίς να μειώνονται τα αποθέματα των υπογείων νερών της περιοχής.



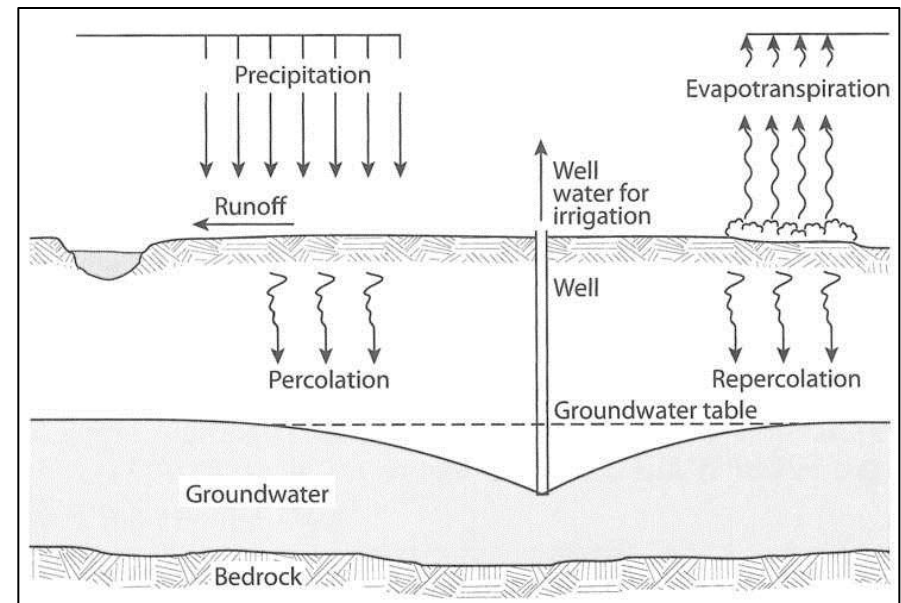
Άσκηση 3.6: Απάντηση

- Αρχικά υπολογίζουμε το ρυθμό βροχόπτωσης ανά έτος σε ολόκληρη την περιοχή:

$$1020 \frac{\text{mm}}{\text{y}} \cdot 8,0 \text{ km}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}} \cdot \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right)^2 = 8,2 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{y}$$

- Άρα η ποσότητα η οποία καταλήγει στα υπόγεια νερά είναι:

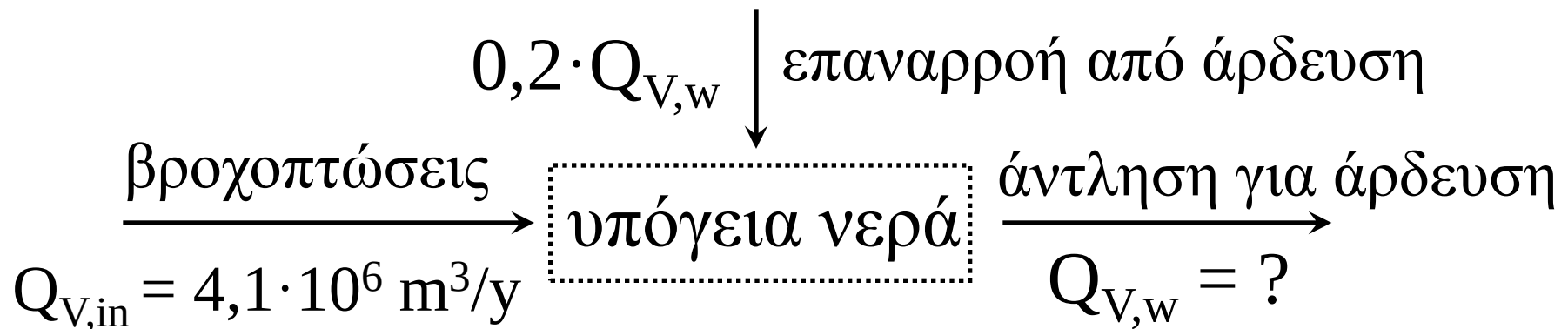
$$0,5 \cdot 8,2 \cdot 10^6 = \\ 4,1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{y}.$$



Άσκηση 3.6: Απάντηση



- Καταστρώνουμε το παρακάτω σχεδιάγραμμα για τα υπόγεια νερά της περιοχής:



- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας (εξίσωση 3.11) για τα υπόγεια νερά της περιοχής:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Άσκηση 3.6: Απάντηση



- Για να μη μειωθούν τα αποθέματα των υπογείων νερών της περιοχής το σύστημα (υπόγεια νερά) θα πρέπει να είναι σε σταθερή κατάσταση.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{in}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{out}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{reaction}}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta m_{in}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{out}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\rho \cdot V_{in})}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{out})}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$Q_{V,in}^{ολικό} = Q_{V,out}^{ολικό} \Leftrightarrow 4,1 \cdot 10^6 + 0,2 \cdot Q_{V,w} = Q_{V,w} \Leftrightarrow$$

$$4,1 \cdot 10^6 = 0,8 \cdot Q_{V,w} \Leftrightarrow Q_{V,w} = 5,1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{y}$$

Ισοζύγιο μάζας πολλών συστατικών



- Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες στο σύστημα εισέρχονται περισσότερα από ένα συστατικά.
- Έστω μια ουσία A η οποία είναι διαλυμένη στο νερό (ή γενικότερα σε ένα ρευστό, π.χ. αέρας).
- Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το ισοζύγιο μάζας της ουσίας A μέσα στα όρια ενός συστήματος.
- Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εφαρμόσουμε ξεχωριστά ισοζύγια μάζας για το νερό και για την ουσία A .



Ισοζύγιο μάζας πολλών συστατικών

- Εξετάζουμε κάθε ένα όρο της εξίσωσης του ισοζυγίου μάζας της ουσίας A.

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{A,in}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{A,out}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{A,reaction}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Ισοζύγιο μάζας της διαλυμένης ουσίας A



- **Ρυθμός συσσώρευσης** της μάζας της ουσίας στο σύστημα ($\Delta m_A / \Delta t$).
- Αν η συγκέντρωση της ουσίας σε όλο τον όγκο του συστήματος είναι σταθερή τότε έχουμε:

$$C_A = \frac{m_A}{V} \Leftrightarrow m_A = C_A \cdot V$$

- Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στο ρυθμό συσσώρευσης της μάζας της ουσίας A μέσα στα όρια του συστήματος έχουμε:



$$\frac{\Delta m_A}{\Delta t} = \frac{\Delta(C_A \cdot V)}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t} = V \cdot \frac{\Delta C_A}{\Delta t} \quad (3.13)$$

- Ο όγκος του συστήματος, V , κατά κανόνα παραμένει σταθερός.
- Ως προς τη συγκέντρωση της ουσίας A , C_A , υπάρχουν δύο δυνατότητες:
 - ✓ $\Delta C_A / \Delta t = 0$
 - ✓ $\Delta C_A / \Delta t \neq 0$



Ρυθμός συσσώρευσης

- Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες όταν έχει παρέλθει μεγάλο χρονικό διάστημα από την έναρξη της διεργασίας, τότε η συγκέντρωση της ουσίας στο σύστημα παραμένει σταθερή.
- Στην περίπτωση αυτή ισχύει: $\Delta C_A / \Delta t = 0$, άρα ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας της ουσίας στο σύστημα είναι μηδέν: $\Delta \mathbf{m}_A / \Delta t = \mathbf{0}$.
- Όταν ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας της ουσίας στο σύστημα είναι μηδέν τότε η κατάσταση χαρακτηρίζεται ως **σταθερή κατάσταση**.



Ρυθμός συσσώρευσης

- Αντίθετα, όταν η συγκέντρωση της ουσίας στο σύστημα μεταβάλλεται (δηλαδή $\Delta C_A / \Delta t \neq 0$), τότε ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας της ουσίας στο σύστημα είναι διαφορετικός του μηδενός: $\Delta m_A / \Delta t \neq 0$.
- Στις περιπτώσεις αυτές η κατάσταση χαρακτηρίζεται ως **μη σταθερή κατάσταση**.
- Δεν είναι πάντα εύκολο να διαπιστώσουμε αν το σύστημα βρίσκεται σε σταθερή ή όχι κατάσταση.



- Αν οι συνθήκες στο σύστημα έχουν μεταβληθεί σχετικά πρόσφατα τότε πιθανότατα η κατάσταση είναι μη σταθερή.
- Αντίθετα, αν οι συνθήκες στο σύστημα έχουν παραμείνει σταθερές για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα τότε η κατάσταση πιθανότατα είναι σταθερή.
- Η μαθηματική επεξεργασία μιας σταθερής κατάστασης ως μη σταθερής οδηγεί πάντα στο σωστό αποτέλεσμα.



- Αντίθετα, η μαθηματική επεξεργασία μιας μη σταθερής κατάστασης ως σταθερής δεν οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα.
- Αυτό ωστόσο δε σημαίνει ότι όλα τα συστήματα πρέπει να θεωρούνται ως μη σταθερά.
- Η μαθηματική επεξεργασία των μη σταθερών συστημάτων είναι κατά κανόνα πιο δύσκολη.
- Κατά συνέπεια είναι πλεονέκτημα να μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια σταθερή κατάσταση όταν αυτή πράγματι είναι παρούσα.



Όροι της εξίσωσης του ισοζυγίου μάζας

- **Ρυθμός εισόδου** της μάζας της ουσίας A στο σύστημα ($\Delta m_{A,in}/\Delta t$).
- Συνήθως είναι γνωστή η ογκομετρική ταχύτητα ροής, Q_V , του καθενός ρεύματος εισόδου το οποίο εισέρχεται στο σύστημα, το οποίο ισούται με:

$$Q_V = \frac{V}{t}$$

- Ισχύει ότι:

$$C_A \cdot Q_V = \frac{m_A}{V} \cdot \frac{V}{t} = \frac{m_A}{t}$$



➤ Άρα έχουμε:

$$\frac{\Delta m_{A,in}}{\Delta t} = \frac{\Delta(C_{A,in} \cdot Q_{V,in})}{\Delta t} = C_{A,in} \cdot Q_{V,in} \quad (3.14)$$

➤ Συνήθως τόσο η συγκέντρωση της ουσίας A στο ρεύμα εισόδου ($C_{A,in}$) όσο και η ογκομετρική ταχύτητα ροής του ρεύματος εισόδου ($Q_{V,in}$) είναι σταθερές.



- Σε κάποιες περιπτώσεις η ουσία μπορεί να εισέρχεται απευθείας στο σύστημα, π.χ. εκπομπές αερίων.
- Στις περιπτώσεις αυτές, οι εκπομπές δίνονται απευθείας ως ροή μάζας, σε μονάδες μάζα/χρόνος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν απευθείας στην εξίσωση του ισοζυγίου μάζας.



Όροι της εξίσωσης του ισοζυγίου μάζας

- **Ρυθμός εξόδου** της μάζας της ουσίας από το σύστημα ($\Delta m_{A,out}/\Delta t$).
- Κατά αντιστοιχία, ο **ρυθμός εξόδου** της μάζας της ουσίας από το σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta m_{A,out}}{\Delta t} = C_A \cdot Q_{V,out} \quad (3.15)$$
- $Q_{V,out}$: η ογκομετρική ταχύτητα ροής της εξόδου
- $C_{A,out} = C_A$: η συγκέντρωση της ουσίας στο ρεύμα εξόδου, η οποία συνήθως είναι ίση με τη συγκέντρωση της ουσίας μέσα στα όρια του συστήματος.

Όροι της εξίσωσης του ισοζυγίου μάζας



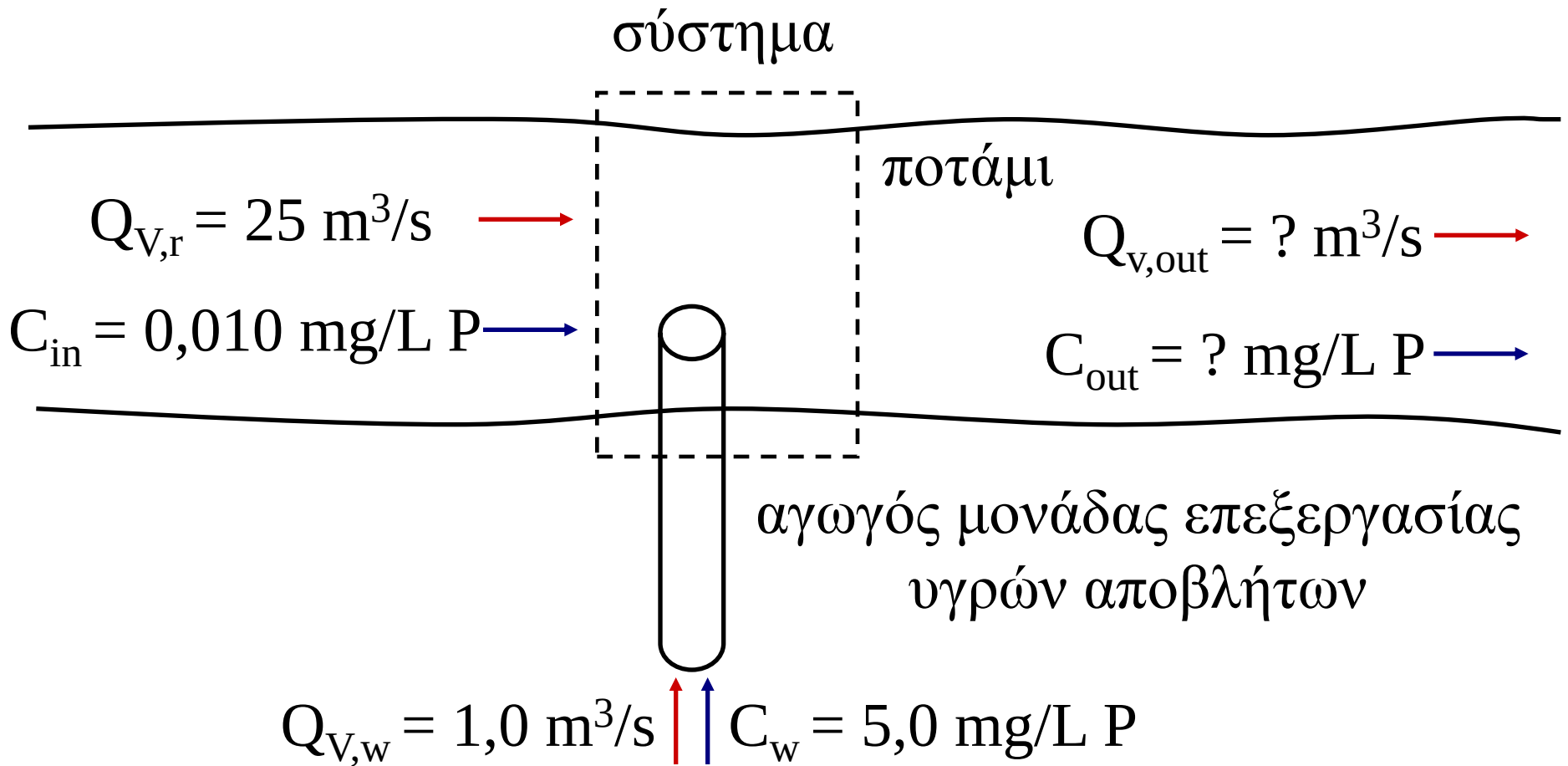
- **Ρυθμός αντίδρασης** (σχηματισμού ή διάσπασης) της ουσίας μέσα στα όρια του συστήματος ($\Delta \mathbf{m}_{A, \text{reaction}} / \Delta \mathbf{t}$).
- Ο όρος αυτός αναφέρεται στο ρυθμό μεταβολής της μάζας της ουσίας λόγω χημικών ή/και βιολογικών αντιδράσεων (σχηματισμού ή διάσπασης) οι οποίες λαμβάνουν χώρα μέσα στα όρια του συστήματος.
- Έχει μονάδες μάζα/χρόνος.

Άσκηση 3.7: Ανάμιξη



- Ένας αγωγός μίας μονάδας επεξεργασίας υγρών αποβλήτων εκβάλλει $1,0 \text{ m}^3/\text{s}$ αποβλήτων, τα οποία περιέχουν $5,0 \text{ mg/L}$ P (φωσφόρου), σε ένα ποτάμι με ροή $25 \text{ m}^3/\text{s}$, τα νερά του οποίου περιέχουν $0,010 \text{ mg/L}$ P(φωσφόρου).
- Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση του P (φωσφόρου), εκφρασμένη ως mg/L , στο ποτάμι μετά την απόρριψη των αποβλήτων.

Άσκηση 3.7: Απάντηση





Άσκηση 3.7: Απάντηση

- Για να λύσουμε το πρόβλημα θα εφαρμόσουμε δύο ισοζύγια μάζας, ένα για το νερό και ένα για το P (φώσφορο).
- Ισοζύγιο μάζας για το νερό:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 0 = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} = 0 \quad (3.11) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{in}})}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{out}})}{\Delta t}$$



Άσκηση 3.7: Απάντηση

- Άρα για τη ροή του ρεύματος εξόδου, δηλαδή του ποταμού μετά την ανάμιξη, έχουμε:

$$\frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{in}})}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho \cdot V_{\text{out}})}{\Delta t} \Leftrightarrow \rho \cdot \frac{\Delta V_{\text{in}}}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta V_{\text{in}}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow Q_{V,\text{in}} = Q_{V,\text{out}} \Leftrightarrow$$

$$Q_{V,r} + Q_{V,w} = Q_{V,\text{out}} \Leftrightarrow$$

$$Q_{V,\text{out}} = 25 \text{ m}^3/\text{s} + 1,0 \text{ m}^3/\text{s} = 26 \text{ m}^3/\text{s}$$

Άσκηση 3.7: Απάντηση



➤ Ισοζύγιο μάζας για το φώσφορο:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \pm \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} = 0 \quad (3.11) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta m_{\text{in}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta(C_{\text{in}} \cdot V_{\text{in}})}{\Delta t} = \frac{\Delta(C_{\text{out}} \cdot V_{\text{out}})}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$C_{\text{in}} \cdot \frac{\Delta V_{\text{in}}}{\Delta t} = C_{\text{out}} \cdot \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta t} \Leftrightarrow C_{\text{in}} \cdot Q_{V,\text{in}} = C_{\text{out}} \cdot Q_{V,\text{out}} \Leftrightarrow$$



Άσκηση 3.7: Απάντηση

- Άρα για τη συγκέντρωση του φωσφόρου του ρεύματος εξόδου μετά την ανάμιξη έχουμε:

$$C_r \cdot Q_{V,r} + C_w \cdot Q_{V,w} = C_{out} \cdot Q_{V,out} \Leftrightarrow$$

$$C_{out} = \frac{C_r \cdot Q_{V,r} + C_w \cdot Q_{V,w}}{Q_{V,out}} \Leftrightarrow$$

$$C_{out} = \frac{0,010 \text{ mg/L} \cdot 25 \text{ m}^3/\text{s} + 5,0 \text{ mg/L} \cdot 1,0 \text{ m}^3/\text{s}}{26 \text{ m}^3/\text{s}} \Leftrightarrow$$

$$C_{out} = 0,20 \text{ mg/L}$$

Άσκηση 3.8



- Ένας ποταμός Α έχει ροή υδάτων ίση με $25 \text{ m}^3/\text{s}$ και έχει συγκέντρωση αιωρούμενων στερεών ίση με 250 mg/L .
- Ο ποταμός αυτός συναντάει ένα μικρότερο παραπόταμό του Β και συνενώνεται μαζί του σχηματίζοντας ένα μεγαλύτερο ποτάμι Γ.
- Ο παραπόταμος Β έχει ροή $8,64 \times 10^8 \text{ L/d}$ και συγκέντρωση αιωρούμενων στερεών ίση με $1,5 \text{ g/L}$.
- Να βρείτε τη συγκέντρωση των αιωρούμενων στερεών στον ποταμό Γ ο οποίος προκύπτει από τη συνένωση των ποταμών Α και Β.

Άσκηση 3.9



- Ένας χώρος διασκέδασης (bar) έχει όγκο $500,0 \text{ m}^3$. Το bar ανοίγει στις 9:00 το βράδυ και σχεδόν αμέσως ο χώρος γεμίζει από θαμώνες.
- Στην αρχή ο χώρος περιέχει καθαρό αέρα.
- Ωστόσο, μεταξύ των θαμώνων υπάρχουν 50 καπνιστές, καθένας εκ των οποίων καπνίζει κατά μέσο όρο 2 τσιγάρα των ώρα.
- Ο καπνός ο οποίος εκλύεται από το κάθε τσιγάρο περιέχει, μεταξύ άλλων, περίπου $1,4 \text{ mg}$ φορμαλδεΐδης (HCHO), η οποία είναι αέριος ρύπος και σε σχετικά μεγάλες συγκεντρώσεις προκαλεί ερεθισμό στα μάτια.

Άσκηση 3.9



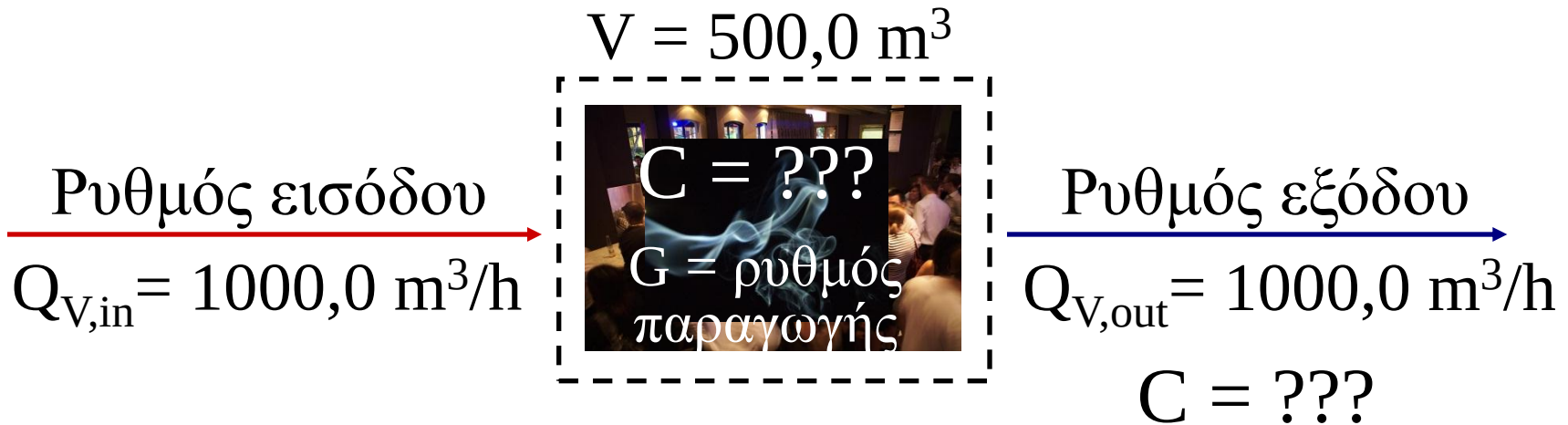
- Από το σύστημα εξαερισμού εισέρχεται μέσα στην αίθουσα του bar καθαρός αέρας με ροή $1000,0 \text{ m}^3/\text{h}$ και μετά την ανάμιξή του με τον αέρα ο οποίος βρίσκεται μέσα στο bar εξέρχεται με την ίδια ροή.
1. Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση της φορμαλδεΰδης στο bar όταν έχει αποκατασταθεί σταθερή κατάσταση.
 2. Να υπολογίσετε πως μεταβάλλεται η συγκέντρωση της φορμαλδεΰδης ως προς το χρόνο μέσα στο bar.

Άσκηση 3.9



- Να θεωρήσετε ότι κάθε χρονική στιγμή η συγκέντρωση της φορμαλδεΰδης είναι ίδια σε όλο τον όγκο της αίθουσας.
- Επίσης, ο αέρας ο οποίος εξέρχεται από την αίθουσα έχει την ίδια συγκέντρωση φορμαλδεΰδης με τον αέρα ο οποίος βρίσκεται μέσα στην αίθουσα.

Άσκηση 3.9: Απάντηση



- Ο ρυθμός παραγωγής G της φορμαλδεΰδης μέσα στο bar ισούται με:

$$G = 50 \text{ καπνιστές} \times 2 \text{ τσιγάρα/h} \times 1,40 \text{ mg/τσιγάρο} \\ = 140 \text{ mg/h φορμαλδεΰδη}$$

- Εφαρμόζουμε το ισοζύγιο μάζας για τη φορμαλδεΰδη:



Άσκηση 3.9: Απάντηση

- Ισοζύγιο μάζας για τη φορμαλδεΰδη:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{in}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{out}}{\Delta t} + \frac{\Delta m_{reaction}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

1. Όταν έχουμε σταθερή κατάσταση μέσα στο σύστημα τότε $\Delta m / \Delta t = 0$.
- Επίσης ο ρυθμός εισόδου της ουσίας στο σύστημα είναι μηδέν, δηλαδή: $\Delta m_{in} / \Delta t = 0$.
- Ωστόσο, η ουσία σχηματίζεται μέσα στο σύστημα με ρυθμό $G = 140 \text{ mg/h}$



Άσκηση 3.9: Απάντηση

➤ Άρα έχουμε ότι:

$$\frac{\Delta m_{\text{out}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{reaction}}}{\Delta t} \Leftrightarrow Q \cdot C_{\text{st}} = G \Leftrightarrow$$

$$C_{\text{st}} = \frac{G}{Q} = \frac{140 \text{ mg/h}}{1000,0 \text{ m}^3/\text{h}} = 0,14 \text{ mg/m}^3$$

➤ Όπου C_{st} η συγκέντρωση της φορμαλδεΐδης στη σταθερή κατάσταση (steady state).



Άσκηση 3.9: Απάντηση

2. Όταν δεν έχουμε σταθερή κατάσταση μέσα στο σύστημα τότε $\Delta m / \Delta t \neq 0$.

➤ Τότε έχουμε:

$$\frac{dm}{dt} = \cancel{\frac{dm_{in}}{dt}} - \frac{dm_{out}}{dt} + \frac{dm_{reaction}}{dt} \Leftrightarrow = 0$$

$$\frac{d(C \cdot V)}{dt} = -QC + G \Leftrightarrow V \frac{dC}{dt} = -QC + G \Leftrightarrow$$

$$V \frac{dC}{dt} = -QC + QC_{st} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} (C - C_{st})}$$



Άσκηση 3.9: Απάντηση

- Για να λύσουμε την προηγούμενη διαφορική εξίσωση εργαζόμαστε ως εξής:
- Θέτουμε $y = C - C_{st}$
- Τότε έχουμε: $\frac{dy}{dt} = \frac{d(C - C_{st})}{dt} = \frac{dC}{dt}$
- Κατά συνέπεια, η προηγούμενη διαφορική εξίσωση λύνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{Q}{V}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{Q}{V}dt \Leftrightarrow \int_{y_0}^{y_t} \frac{dy}{y} = -\frac{Q}{V} \int_0^t dt \Leftrightarrow$$



Άσκηση 3.9: Απάντηση

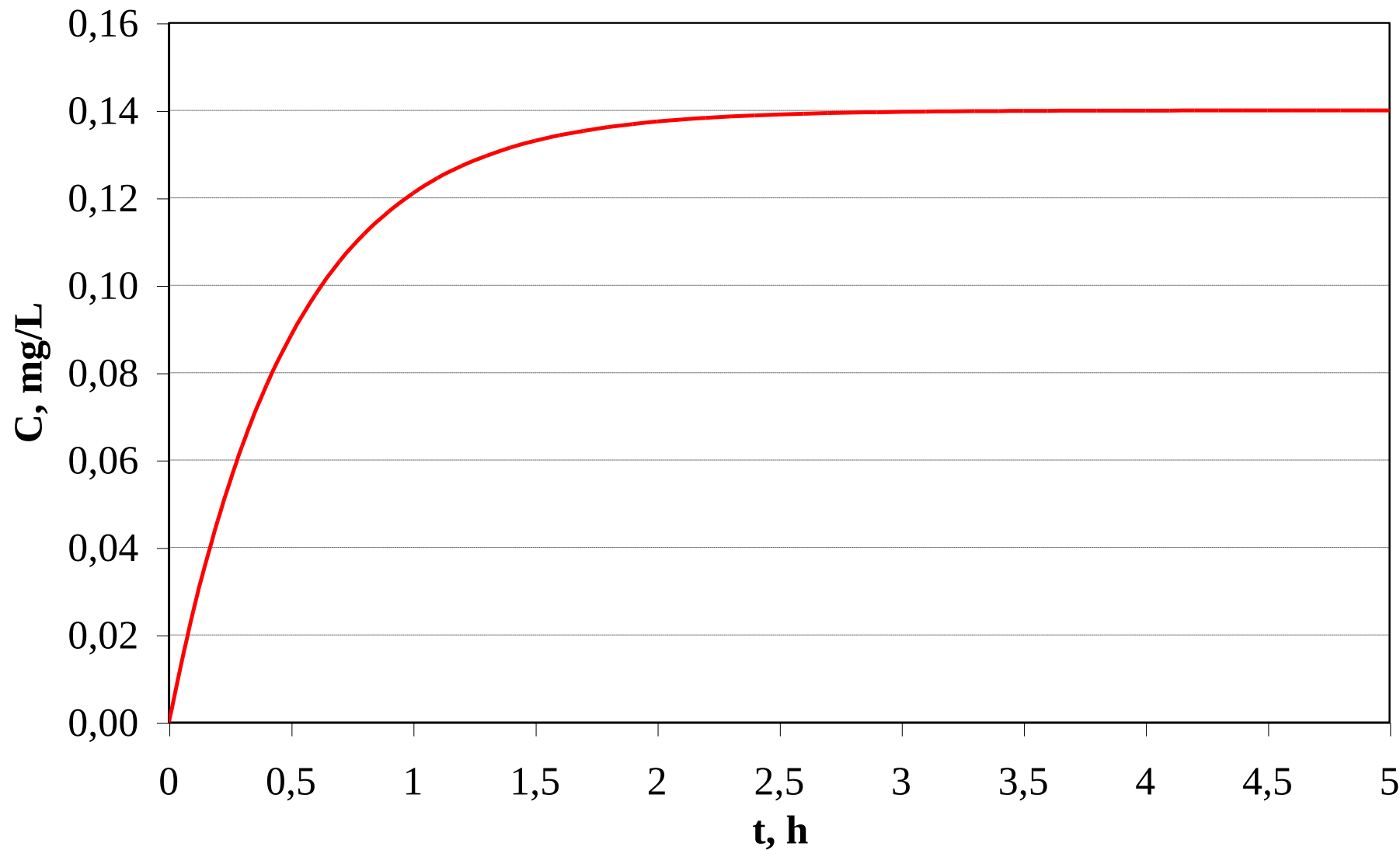
$$\ln \frac{y_t}{y_0} = -\frac{Q}{V} t \Leftrightarrow y_t = y_0 e^{-\frac{Q}{V} t}$$

- Όμως όταν $t = 0$, τότε $C_0 = 0$.
- Άρα, όταν $t = 0$, τότε $y_0 = C_0 - C_{st} = -C_{st}$
- Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$C_t - C_{st} = -C_{st} e^{-\frac{Q}{V} t} \Leftrightarrow C_t = C_{st} - C_{st} e^{-\frac{Q}{V} t} \Leftrightarrow$$

$$C_t = C_{st} \left(1 - e^{-\frac{Q}{V} t} \right) \Leftrightarrow C_t = 0,14 \left(1 - e^{-2t} \right)$$

Άσκηση 3.9: Απάντηση





Άσκηση 3.9: Απάντηση

- Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι σε περίπου 3 ώρες έχει επέλθει σταθερή κατάσταση.
- Δηλαδή από τις 12 η ώρα τα μεσάνυχτα και μετά η συγκέντρωση της φορμαλδεύδης στο χώρο του bar παραμένει σταθερή και ίση με $0,14 \text{ mg/m}^3$.

Άσκηση 3.9



- Το bar κλείνει στις 4 η ώρα τα ξημερώματα, οπότε όλοι οι θαμώνες αποχωρούν από την αίθουσα.
- 3. Πόση ώρα πρέπει να συνεχίσει να δουλεύει ο εξαιρισμός της αίθουσας ώστε η συγκέντρωση της φορμαλδεΐδης πρακτικά να μηδενιστεί;



Άσκηση 3.9: Απάντηση

- Εφαρμόζουμε πάλι το ισοζύγιο μάζας για τη φορμαλδεΰδη:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{in}}{dt} - \frac{dm_{out}}{dt} + \frac{dm_{reaction}}{dt} \Leftrightarrow$$

$$V \frac{dC}{dt} = -QC \Leftrightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{Q}{V} dt \Leftrightarrow \int_{C_0}^{C_t} \frac{dC}{C} = -\frac{Q}{V} \int_0^t dt \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{C_t}{C_0} = -\frac{Q}{V} t \Leftrightarrow C_t = C_0 e^{-\frac{Q}{V} t}$$

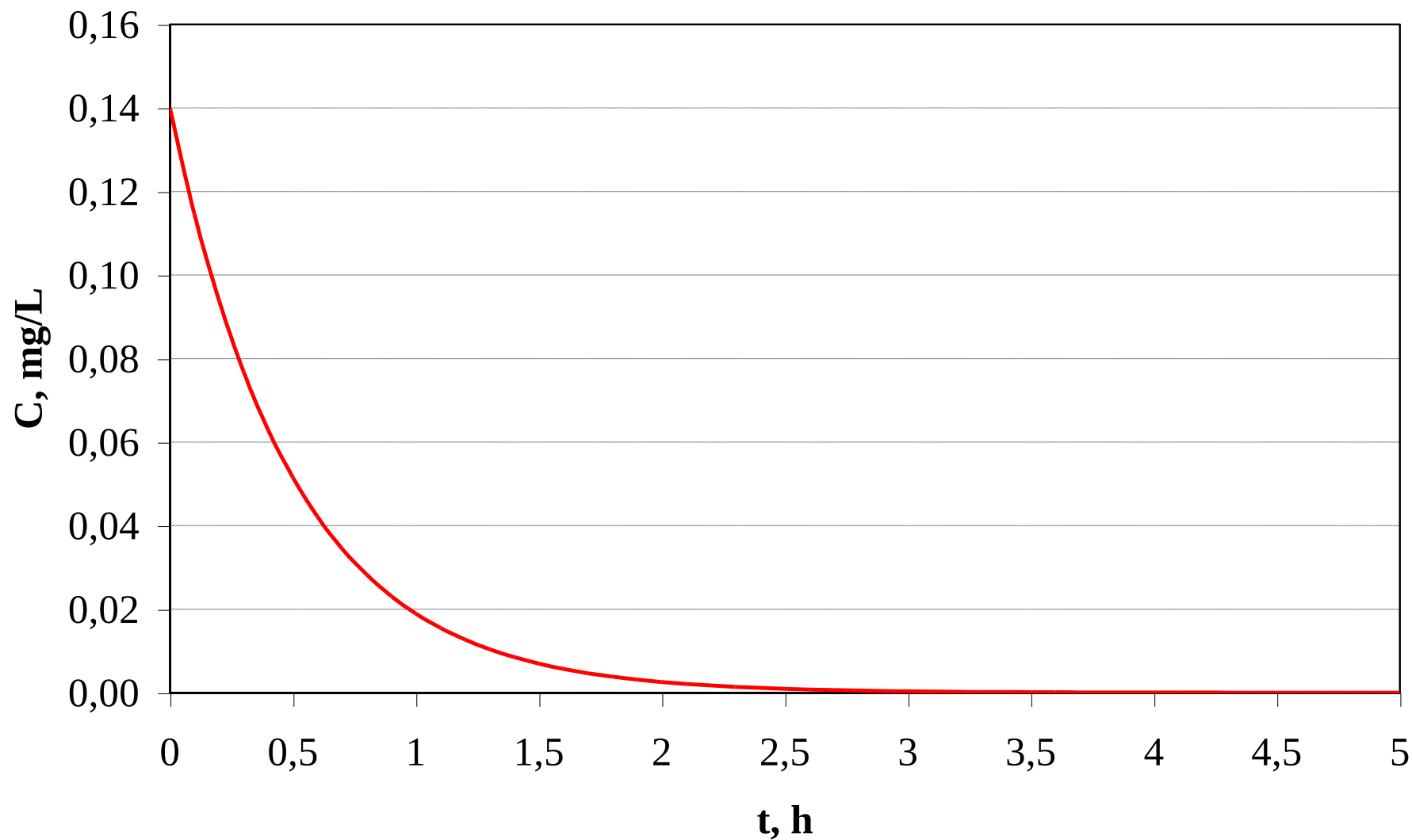


Άσκηση 3.9: Απάντηση

- **Προσοχή!** Στην περίπτωση αυτή η αρχική συγκέντρωση ισούται με τη συγκέντρωση της φορμαλδεΰδης στη σταθερή κατάσταση, δηλαδή: ισχύει ότι $C_0 = C_{st}$.
- Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$C_t = C_{st} e^{-\frac{Q}{V}t} \Leftrightarrow C_t = 0,14e^{-2t}$$

Άσκηση 3.9: Απάντηση





Άσκηση 3.9: Απάντηση

- Άρα ο εξαερισμός της αίθουσας πρέπει να δουλεύει για 3 περίπου ακόμα ώρες ώστε η αίθουσα να καθαρίσει πλήρως από την φορμαλδεΐδη.