

Εισαγωγή στην Επιστήμη του Μηχανικού Περιβάλλοντος

Νίκος Ξεκουκουλωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Γραφείο Κ2.125, τηλ.: 28210-37772
e-mail: nikosxek@gmail.com

Κεφάλαιο 2: Τεχνικοί υπολογισμοί

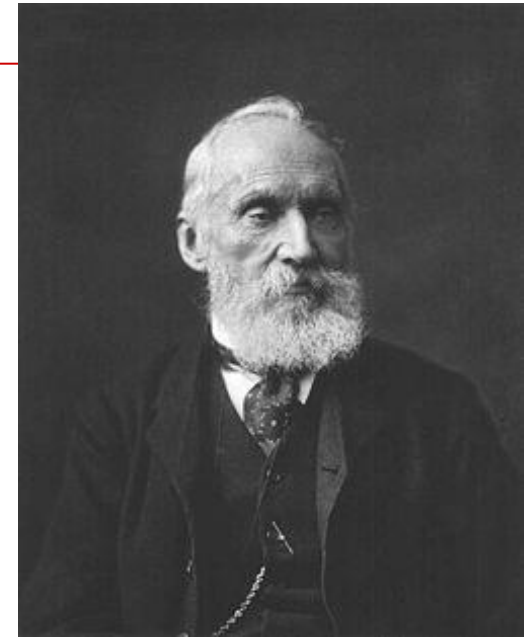


- Διαστάσεις και Μονάδες Μέτρησης
- Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης (SI)
- Μετατροπές μονάδων μέτρησης
- Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις-σημαντικά ψηφία
- Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων
- Βασικά μεγέθη στη Μηχανική Περιβάλλοντος

Μονάδες Μέτρησης



- I often say that, when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you should know something about it, but when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind.
- Συχνά λέω ότι όταν μπορείς να μετρήσεις αυτό για το οποίο συζητάς, και το εκφράσεις με αριθμούς, τότε ξέρεις κάτι γι' αυτό. Αλλά όταν δεν μπορείς να το εκφράσεις με αριθμούς, τότε η γνώση σου είναι ελλιπής και μη ικανοποιητική.



William Thomson, ή Lord Kelvin (1824 -1907). Βρετανός, Καθηγητής Φυσικής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο της Γλασκόβης. Ασχολήθηκε με τους νόμους της Θερμοδυναμικής και πρότεινε την απόλυτη κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας (απόλυτο μηδέν).

Μονάδες μέτρησης



- Πολλές ιδιότητες είναι **ποσοτικές (quantitative)**, μπορούν να μετρηθούν ή να απαριθμηθούν, ενώ άλλες είναι **ποιοτικές (qualitative)**.



Ζωγράφος: Gustav Klimt
(1862-1918).

Τίτλος: Der Kuss (The Kiss)
(1907-1908).

Λάδι και φύλλα χρυσού σε
καμβά.

Διαστάσεις: 180 cm × 180 cm
(70.9 in × 70.9 in)

Αριθμός ατόμων στον πίνακα: 2

Ποσότητες και μονάδες μέτρησης



- **Ποσότητα (quantity)**: είναι η ιδιότητα ενός φαινομένου, ενός σώματος ή μιας ουσίας.
- Η ιδιότητα αυτή έχει **μέγεθος (magnitude)**, το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο:
 - ✓ μιας **αριθμητικής τιμής (numerical value)**, π.χ. 2,74
 - ✓ και μίας **μονάδας μέτρησης (measurement unit)**, π.χ. οτιδήποτε μπορεί να είναι το 2,74 π.χ. 2 meters, 1/3 second, 4,29 kilograms, 5 μήλα

Διαστάσεις και Μονάδες Μέτρησης



- Οι **διαστάσεις (dimensions)** αποτελούν βασικά μετρήσιμα μεγέθη, όπως:
 - ✓ το μήκος
 - ✓ ο χρόνος
 - ✓ η μάζα
 - ✓ η θερμοκρασία, κ.α.
- Οι **μονάδες μέτρησης (units)** αποτελούν τα μέσα με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να μετρήσουμε τις διαστάσεις, όπως εκατοστά για το μήκος, δευτερόλεπτα για το χρόνο, κ.α.

Μονάδες μέτρησης



- **Μονάδα μέτρησης (unit):** είναι μία πρότυπη ποσότητα, η οποία **ορίζεται επακριβώς**, και υιοθετείται κατά σύμβαση ή/και με νόμο και χρησιμοποιείται ως πρότυπο για τη μέτρηση μιας οποιασδήποτε άλλης ποσότητας του ίδιου είδους.
- Η πρότυπη αυτή ποσότητα μπορεί να συγκριθεί με οποιαδήποτε άλλη ποσότητα του ίδιου είδους ώστε ο λόγος τους να εκφραστεί ως ένας αριθμός.

Μονάδες μέτρησης



- Υπάρχουν διάφορες μονάδες μέτρησης για τις διάφορες ποσότητες.
- Μονάδες μέτρησης του **μήκους (length)**:
 - ✓ Αρχαιότητα: **πήχης** (ή πήχυς) (Αρχαία Αίγυπτος και Αρχαία Ελλάδα): απόσταση από το άκρο του μεσαίου δακτύλου του χεριού έως τον αγκώνα.
 - ✓ Αντιστοιχεί σε περίπου 50 εκατοστά.



Μονάδες μέτρησης του μήκους

- ✓ **ποῦς** (πόδι) στην Αρχαία Ελλάδα, **pes** στην Αρχαία Ρώμη: μήκος του πέλματος του ποδιού.
- ✓ Ο πρώτος γνωστός ορισμός του ποδιού προέρχεται από του Σουμέριους γύρω στο 2500 π.Χ. και ισούταν με το μήκος του ποδιού ενός αγάλματος.
- ✓ Αντιστοιχεί σε μήκος περίπου 30 εκατοστά.



Μονάδες μέτρησης του μήκους

- **1120 μ.Χ. Αγγλία, γιάρδα (yard):**
η απόσταση από το άκρο της
μύτης μέχρι το άκρο του
τεντωμένου χεριού του Βασιλιά
της Αγγλίας Ερρίκου του 1^{ου}
(Henry I).



Henry I (1068–1135).
Βασιλιάς της Αγγλίας

- 1 yard = 3 feet, 1 foot = 12 inches.
- Στις μέρες μας η γιάρδα ισούται με 0,9144 μέτρα, το πόδι με 0,30480 μέτρα και η ίντσα με 2,54 εκατοστά.

Μονάδες μέτρησης του μήκους



- **1799**, Γαλλία, **μέτρο (metre ή meter)**: $1/10^7$ της απόστασης από τον Ισημερινό έως το Βόρειο Πόλο, μετρημένης πάνω στον μεσημβρινό ο οποίος διέρχεται από το Παρίσι.
- **1889**, **μέτρο**: η απόσταση ανάμεσα σε δύο γραμμές χαραγμένες πάνω σε μια ειδική ράβδο κράματος λευκοχρύσου-ιριδίου, η οποία φυλάσσονταν σε ειδικά διαμορφωμένο χώρο στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org>) στην πόλη Sèvres της Γαλλίας.



Μονάδες μέτρησης του μήκους

- **1983:** Ένα **μέτρο** ισούται με την απόσταση την οποία διανύει το φως στο κενό κατά τη διάρκεια $1/299.792.458$ δευτερολέπτων.
- Συνεπακόλουθο του παραπάνω ορισμού είναι ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι ακριβώς $299.792.458$ μέτρα το δευτερόλεπτο.
- **Σεπτέμβριος 2010:** υποβλήθηκε πρόταση για αλλαγή του ορισμού του μέτρου ως εξής:
- το μέγεθος του μέτρου καθορίζεται από την αριθμητική τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό, η οποία ισούται με ακριβώς $299\,792\,458$ m/s.



Συστήματα μονάδων μέτρησης

- Τα πιο διαδεδομένα συστήματα μονάδων μέτρησης είναι τα εξής:
- Το **Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης (Le Système International d' Unités, SI)**.
- Θεσπίστηκε το 1960 από το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org>).
- Η χρήση του SI έχει υιοθετηθεί από τις περισσότερες χώρες του κόσμου.



Συστήματα μονάδων μέτρησης

- Το σύστημα cgs: είναι σχεδόν ταυτόσημο με το SI.
- Το Αμερικανικό Πρακτικό Σύστημα (American Engineering System) το οποίο χρησιμοποιείται από τους Μηχανικούς στις Η.Π.Α.
- Για τη μετατροπή των μονάδων από το ένα σύστημα στο άλλο χρησιμοποιούνται κατάλληλοι συντελεστές μετατροπής.
- **Στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά το Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης (SI).**

Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης, SI



- Κατά σύμβαση, στο SI διακρίνονται δύο είδη ποσοτήτων, οι:
- **Βασικές ή θεμελιώδεις ποσότητες (base or fundamental quantities):** είναι ένα υποσύνολο ποσοτήτων οι οποίες έχουν επιλεγεί κατά σύμβαση και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (δηλαδή καμία δεν μπορεί να εκφραστεί ως προς τις υπόλοιπες).

Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης, SI



➤ Οι θεμελιώδεις ποσότητες είναι 7:

1. μήκος (length)
2. μάζα (mass)
3. χρόνος (time)
4. ηλεκτρικό ρεύμα (electric current)
5. θερμοκρασία (thermodynamic temperature)
6. ποσότητας χημικής ουσίας (amount of substance)
7. ένταση φωτεινής ακτινοβολίας (luminous intensity)

Διαστάσεις των φυσικών ποσοτήτων



- Κατά σύμβαση, οι ποσότητες οργανώνονται σε ένα σύστημα **διαστάσεων (dimensions)**.
- Κάθε μία από τις επτά θεμελιώσεις ποσότητες του SI θεωρείται ότι έχει τη δική της **διάσταση**.
- Οι διαστάσεις των επτά θεμελιωδών ποσοτήτων συμβολίζονται με ένα κεφαλαίο γράμμα όπως φαίνεται παρακάτω:

Διαστάσεις των θεμελιωδών μονάδων του SI



Θεμελιώδης ποσότητα	Σύμβολο της ποσότητας	Σύμβολο της διάστασης
μήκος	$l, x, r, \text{κ.τ.λ}$	L
μάζα	m	M
χρόνος	t	T
ηλεκτρικό ρεύμα	I, i	I
θερμοκρασία	T	Θ
ποσότητας χημικής ουσίας	n	N
ένταση φωτεινής ακτινοβολίας	I_v	J

Μονάδες μέτρησης των θεμελιωδών ποσοτήτων



Θεμελιώδης ποσότητα	Όνομα μονάδας	Σύμβολο μονάδας
μήκος	μέτρο (meter ή metre)	m
μάζα	κιλό (kilogram)	kg
χρόνος	δευτερόλεπτο (second)	s
ηλεκτρικό ρεύμα	ampere	A
θερμοκρασία	kelvin	K
ποσότητας χημικής ουσίας	mole	mol
ένταση φωτεινής ακτινοβολίας	candela	cd

Ορισμός μονάδων μέτρησης του SI



- <https://www.bipm.org/en/measurement-units/rev-si/#communication>
- Οι ορισμοί των 7 θεμελιωδών ποσοτήτων του SI βρίσκονται υπό αναθεώρηση (Νοέμβριος 2018).
- Μετά την έγκριση της αναθεώρησης, όλες οι θεμελιώδεις ποσότητες του SI θα ορίζονται με βάση τις τιμές διαφόρων **σταθερών**.
- Οι τιμές των σταθερών αυτών είναι γνωστές με πολύ μεγάλη ακρίβεια και κατά συνέπεια εφεξής οι 7 θεμελιώδεις ποσότητες θα ορίζονται με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Ορισμός μονάδων μέτρησης του SI



Quantity	SI unit
time	The second , symbol s, is the SI unit of time. It is defined by taking the fixed numerical value of the caesium frequency $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the caesium 133 atom, to be 9 192 631 770 when expressed in the unit Hz, which is equal to s^{-1} .
length	The metre , symbol m, is the SI unit of length. It is defined by taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum c to be 299 792 458 when expressed in the unit m s^{-1} , where the second is defined in terms of the caesium frequency $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
mass	The kilogram , symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant h to be $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ when expressed in the unit J s, which is equal to $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, where the metre and the second are defined in terms of c and $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Ορισμός μονάδων μέτρησης του SI



Quantity	SI unit
electric current	The ampere , symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge e to be $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ when expressed in the unit C, which is equal to A s, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
thermodynamic temperature	The kelvin , symbol K, is the SI unit of thermodynamic temperature. It is defined by taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant k to be $1.380\,649 \times 10^{-23}$ when expressed in the unit J K ⁻¹ , which is equal to kg m ² s ⁻² K ⁻¹ , where the kilogram, metre and second are defined in terms of h , c and $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
amount of substance	The mole , symbol mol, is the SI unit of amount of substance. One mole contains exactly $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, N_{A} , when expressed in the unit mol ⁻¹ and is called the Avogadro number.

Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI



- **Παράγωγες ποσότητες (derived quantities):**
προέρχονται από τις θεμελιώδεις ποσότητες με τη χρήση κατάλληλων εξισώσεων, π.χ.
- ✓ ταχύτητα = μήκος/χρόνος
- ✓ όγκος = μήκος³
- ✓ πυκνότητα = μάζα/μήκος³
- ✓ δύναμη = μάζα×μήκος/χρόνος²
- ✓ πίεση = δύναμη/μήκος² = μάζα/(μήκος×χρόνος²)
- ✓ ενέργεια = μάζα×μήκος²/χρόνος²
- ✓ ισχύς = ενέργεια/χρόνος = μάζα×μήκος²/χρόνος³
- ✓ ... κ.α. (αναρίθμητες !!!)



Διαστάσεις παραγώγων ποσοτήτων

- Οι διαστάσεις των παραγώγων ποσοτήτων γράφονται ως γινόμενα δυνάμεων των διαστάσεων των θεμελιωδών ποσοτήτων χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις οι οποίες συσχετίζουν τις παράγωγες με τις θεμελιώδεις ποσότητες:
- ✓ ταχύτητα = μήκος/χρόνος (L/T ή $L \cdot T^{-1}$)
- ✓ όγκος = μήκος³ (L^3)
- ✓ πυκνότητα = μάζα/μήκος³ (M/L^3 ή $M \cdot L^{-3}$)



Διαστάσεις παραγώγων ποσοτήτων

- ✓ δύναμη = μάζα × μήκος/χρόνος² ($M \cdot L/T^2$ ή $M \cdot L \cdot T^{-2}$)
- ✓ πίεση = μάζα/(μήκος × χρόνος²), ($M/L \cdot T^2$ ή $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$)
- ✓ ενέργεια = μάζα × μήκος²/χρόνος² ($M \cdot L^2/T^2$ ή $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$)
- ✓ ισχύς = ενέργεια/χρόνος = μάζα × μήκος²/χρόνος³ ($M \cdot L^2/T^3$ ή $M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$)



Διαστάσεις παραγώγων ποσοτήτων

- Γενικά, η διάσταση μιας οποιασδήποτε ποσότητας Q , γράφεται με τη μορφή γινομένου των διαστάσεων των θεμελιωδών ποσοτήτων:

$$\text{διάσταση } Q = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot I^{\delta} \cdot \Theta^{\varepsilon} \cdot N^{\zeta} \cdot J^{\eta}$$

- όπου οι εκθέτες $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, και η , είναι κατά κανόνα μικροί ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι μπορεί να είναι θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν.



Διαστάσεις παραγώγων ποσοτήτων

- Υπάρχουν κάποιες παράγωγες ποσότητες για τις οποίες η εξίσωση ορισμού τους είναι τέτοια ώστε όλοι οι εκθέτες των διαστάσεων των θεμελιωδών ποσοτήτων είναι μηδέν.
- Αυτό ισχύει συνήθως για κάθε ποσότητα η οποία ορίζεται ως το πηλίκο δύο ποσοτήτων του ίδιου είδους.
- Οι ποσότητες αυτές αναφέρονται ως **αδιάστατες (dimensionless)**, ή εναλλακτικά ότι έχουν διάσταση 1.

Παράγωγες μονάδες του SI



Φυσική ποσότητα	Όνομα μονάδας	Σύμβολο μονάδας	Διάσταση και μονάδες SI
ενέργεια, έργο	joule	J	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$, $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
δύναμη	newton	N	$M \cdot L \cdot T^{-2}$, $kg \cdot m \cdot s^{-2}$
ισχύς	watt	W	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$, $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
ηλεκτρικό φορτίο	coulomb	C	$I \cdot T$, $A \cdot s$
διαφορά δυναμικού	volt	V	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$, $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
πίεση	pascal	Pa	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$, $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

Παράγωγες μονάδες του SI



Φυσική ποσότητα	Διάσταση και μονάδες SI
όγκος	L^3, m^3
πυκνότητα	$M \cdot L^{-3}, kg \cdot m^{-3}$
ταχύτητα	$L \cdot T^{-1}, m \cdot s^{-1}$
επιτάχυνση	$L \cdot T^{-2}, m \cdot s^{-2}$
παροχή	$L^3 \cdot T^{-1}, m^3 \cdot s^{-1}$
θερμοχωρητικότητα	$L^2 \cdot T^{-2} \cdot \Theta^{-1}, J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$



Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια

- Ένα από τα καλύτερα χαρακτηριστικά του συστήματος SI είναι ότι μονάδες μέτρησης (εκτός από τις μονάδες μέτρησης του χρόνου!) καθώς και τα **πολλαπλάσια** και τα **υποπολλαπλάσια** αυτών συνδέονται με πρότυπους συντελεστές, όπως φαίνεται στους ακόλουθους πίνακες:

Προθέματα μονάδων: πολλαπλάσια



Συντελεστής	Όνομα	Σύμβολο
10^1	deka	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Προθέματα μονάδων: υποπολλαπλάσια



Συντελεστής	Όνομα	Σύμβολο
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Εναλλακτικές μονάδες του SI



Φυσική ποσότητα	Μονάδα μέτρησης SI	Σύμβολο
-----------------	--------------------	---------

Χρόνος	λεπτό (minute)	min, 1 min = 60 s
	ώρα (hour)	h, 1 h = 60 min = 3600 s
	ημέρα (day)	d, 1 d = 24 h = 86400 s
	έτος (year)	y, 1 y = 365 d

Θερμοκρασία	βαθμοί Κελσίου (degrees Celsius)	$^{\circ}\text{C}$, $\text{K} = 273,15 + ^{\circ}\text{C}$
-------------	----------------------------------	---

Όγκος	Λίτρο (litre ή liter)	L , $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
		$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$

Μάζα	Τόνος (tonne, metric ton)	t, $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
	Γραμμάριο (gram)	g, $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$

Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI



- Όταν μια παράγωγη μονάδα σχηματίζεται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση δύο ή περισσότερων μονάδων, τότε το σύμβολό της αποτελείται από τα σύμβολα των επιμέρους μονάδων ενωμένα με το σύμβολο του πολλαπλασιασμού ($\cdot$) ή της διαίρεσης ($/$).
- $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ή $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ή $J = (\text{kg})(\text{m}^2)(\text{s}^{-2})$
- m/s ή $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Μερικές φορές, το σύμβολο του πολλαπλασιασμού παραλείπεται, π.χ. $\text{watt} \cdot \text{hour} = \text{Wh}$

Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI



- Περαιτέρω πληροφορίες τόσο για το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών, όσο και για το Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης μπορείτε να βρείτε στο site: <http://www.bipm.org>
- Δείτε επίσης και το Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας, <http://www.eim.gr/>

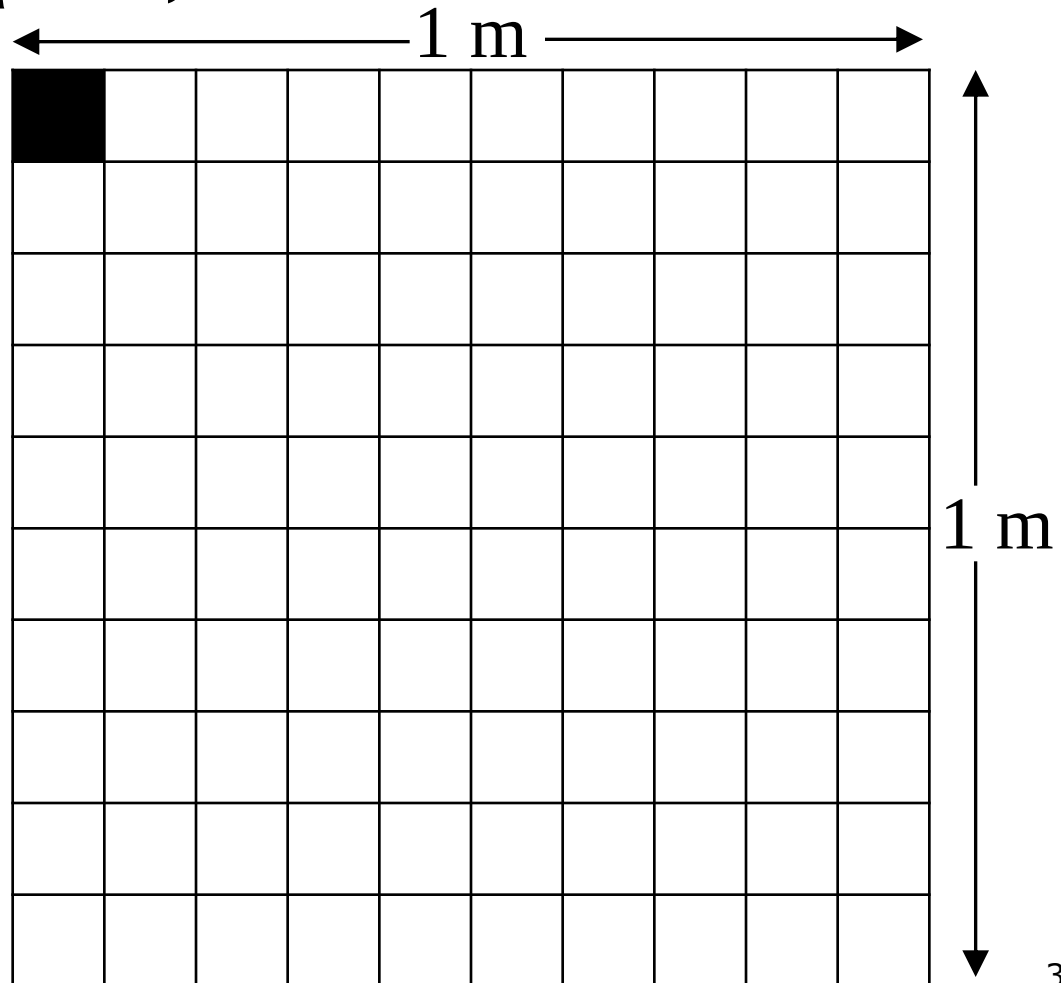
Ερωτήσεις



1. Ποια είναι η σωστή γραφή για το τετραγωνικό εκατοστό: $(\text{cm})^2$ ή cm^2 ;

$$1 \text{ cm}^2 = 100 (\text{cm})^2$$

➤ Απάντηση: η σωστή γραφή είναι $(\text{cm})^2$, ωστόσο έχει επικρατήσει η γραφή cm^2 .



Ερωτήσεις



2. Τι σημαίνει το ms: millisecond ή meter·second;

➤ Απάντηση: millisecond

3. Ποιες από τις παρακάτω μονάδες είναι σωστές ή λάθος σύμφωνα με το SI:

✓ nm

✓ °K

✓ sec

✓ N/mm

✓ kJ/(s)(m³)

✓ 1 χιλιόμετρο = 1 Km

Ερωτήσεις



4. Τι σημαίνει το $\text{mol/L} \cdot \text{s}$: $\frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot \text{s}$ ή $\frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{s}}$

- Απάντηση: σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων σημαίνει το πρώτο.
- Πως θα έπρεπε να ήταν γραμμένο για να σημαίνει το δεύτερο;
- Απάντηση: $\text{mol}/(\text{L} \cdot \text{s})$ ή $\text{mol} \cdot (\text{L} \cdot \text{s})^{-1}$ ή $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ή $(\text{mol})(\text{L}^{-1})(\text{s}^{-1})$



5. Ποια από τις παρακάτω απαντήσεις αντιστοιχεί στη δύναμη η οποία απαιτείται για να ανασηκώσουμε μια βαριά βάλιτσα;
- i. 25 N
 - ii. 25 kN
 - iii. 250 N
 - iv. 250 kN

Ερωτήσεις



6. Να διαλέξετε τη σωστή απάντηση/απαντήσεις:
το watt είναι:
- i. ίσο με ένα joule ανά δευτερόλεπτο
 - ii. ίσο με $1 \text{ (kg)(m}^2\text{)/s}^2$
 - iii. η μονάδα μέτρησης της ισχύος
 - iv. όλα τα παραπάνω
 - v. τίποτα από τα παραπάνω
7. Είναι το kg/s βασική ή παράγωγη μονάδα στο SI;



Μήκος (Length)

- Η μονάδα μέτρησης του μήκους στο SI είναι το μέτρο (meter ή metre), σύμβολο m, διάσταση L.
- Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο πολλαπλάσιο του μέτρου είναι το χιλιόμετρο $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$.
- Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα υποπολλαπλάσια του μέτρου είναι:
 - ✓ $1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m}$
 - ✓ $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
 - ✓ $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$
 - ✓ $1 \text{ }\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$
 - ✓ $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

Μάζα (Mass)



- Η μονάδα μέτρησης της μάζας στο SI είναι το κιλό (kilogram), σύμβολο kg, διάσταση M.
- Αυτή η μονάδα μέτρησης έχει το εξής ασυνήθιστο χαρακτηριστικό: παρά το ότι πρόκειται για βασική μονάδα του SI, σχηματίζεται από το πολλαπλασιαστικό πρόθεμα kilo (σύμβολο k) και τη μονάδα μέτρησης του γραμμαρίου (gram, σύμβολο g).
- Με βάση τους κανόνες του SI, θα μπορούσε να υποτεθεί ότι η βασική μονάδα μέτρησης της μάζας στο SI είναι το γραμμάριο, g, και ότι το κιλό, kg, είναι κατ' ουσίαν πολλαπλάσιό του.



- Όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει.
- Η βασική μονάδα μέτρησης της μάζας στο SI είναι το κιλό, kg, ενώ το γραμμάριο, g, είναι υποπολλαπλάσιό του: $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$.
- Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο τόνος (tonne ή metric ton), σύμβολο t, ο οποίος ισούται με: $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$.
- Υποπολλαπλάσια του κιλού προκύπτουν με την τοποθέτηση κατάλληλων προθεμάτων στο γραμμάριο.



- Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα υποπολλαπλάσια του γραμμαρίου είναι:
- ✓ $1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g} = 10^{-6} \text{ kg}$
 - ✓ $1 \text{ }\mu\text{g} = 10^{-6} \text{ g} = 10^{-9} \text{ kg}$
 - ✓ $1 \text{ ng} = 10^{-9} \text{ g} = 10^{-12} \text{ kg}.$

Χρόνος (Time)



- Η μονάδα μέτρησης του χρόνου στο SI είναι το δευτερόλεπτο (second), σύμβολο s, διάσταση T.
- Όλα τα γνωστά πολλαπλάσια του δευτερολέπτου ανήκουν στις εναλλακτικές μονάδες του SI:
 - ✓ $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
 - ✓ $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
 - ✓ $1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 1.440 \text{ min} = 86.400 \text{ s}$
 - ✓ $1 \text{ y} = 365 \text{ d} = 8.760 \text{ h} = 525.600 \text{ min} = 31.536.000 \text{ s}$



- Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα υποπολλαπλάσια του δευτερολέπτου είναι:
- ✓ $1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$
 - ✓ $1 \text{ }\mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$
 - ✓ $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$

Θερμοκρασία (Temperature)



- Η μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας στο SI είναι ο βαθμός kelvin, σύμβολο K (προσοχή!!!: όχι $^{\circ}\text{K}$), διάσταση Θ .
- Το 0 της κλίμακας Kelvin είναι η χαμηλότερη θερμοκρασία η οποία μπορεί να επιτευχθεί: συχνά αναφέρεται ως απόλυτο μηδέν (absolute zero).
- Ωστόσο, στην καθημερινή πρακτική χρησιμοποιείται ευρέως ο βαθμός Κελσίου (Celsius), σύμβολο $^{\circ}\text{C}$.

Θερμοκρασία



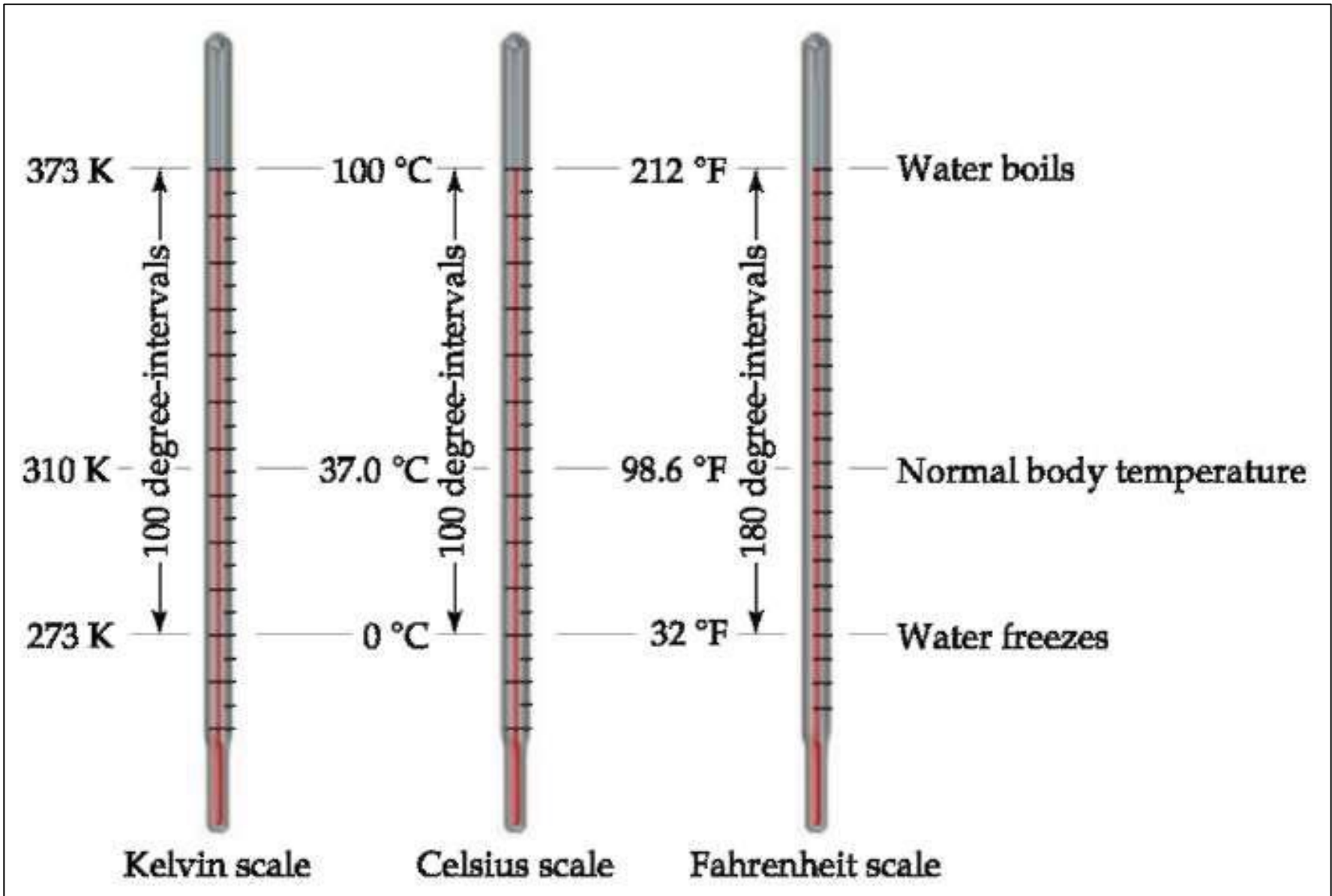
- Η μετατροπή μεταξύ βαθμών K και °C γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$K = ^\circ C + 273,15 \quad (2.1)$$

- Σε πολλές χώρες χρησιμοποιείται επίσης ο βαθμός Fahrenheit, σύμβολο °F.
- Η μετατροπή μεταξύ βαθμών °C και °F γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$^\circ C = \frac{5}{9}(^\circ F - 32) \Leftrightarrow ^\circ F = \frac{9}{5}(^\circ C) + 32 \quad (2.2)$$

Βαθμοί K, °C και °F





Όγκος (Volume)

- Η μονάδα μέτρησης του όγκου στο SI είναι το m^3 .
- Ωστόσο, πολύ συχνά χρησιμοποιούνται επίσης το L και το mL, τα οποία ανήκουν στις εναλλακτικές μονάδες του SI.
- Το λίτρο ορίζεται ως εξής: $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.
- Κατά συνέπεια, με βάση τον ορισμό του λίτρου προκύπτει ότι:

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1 (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

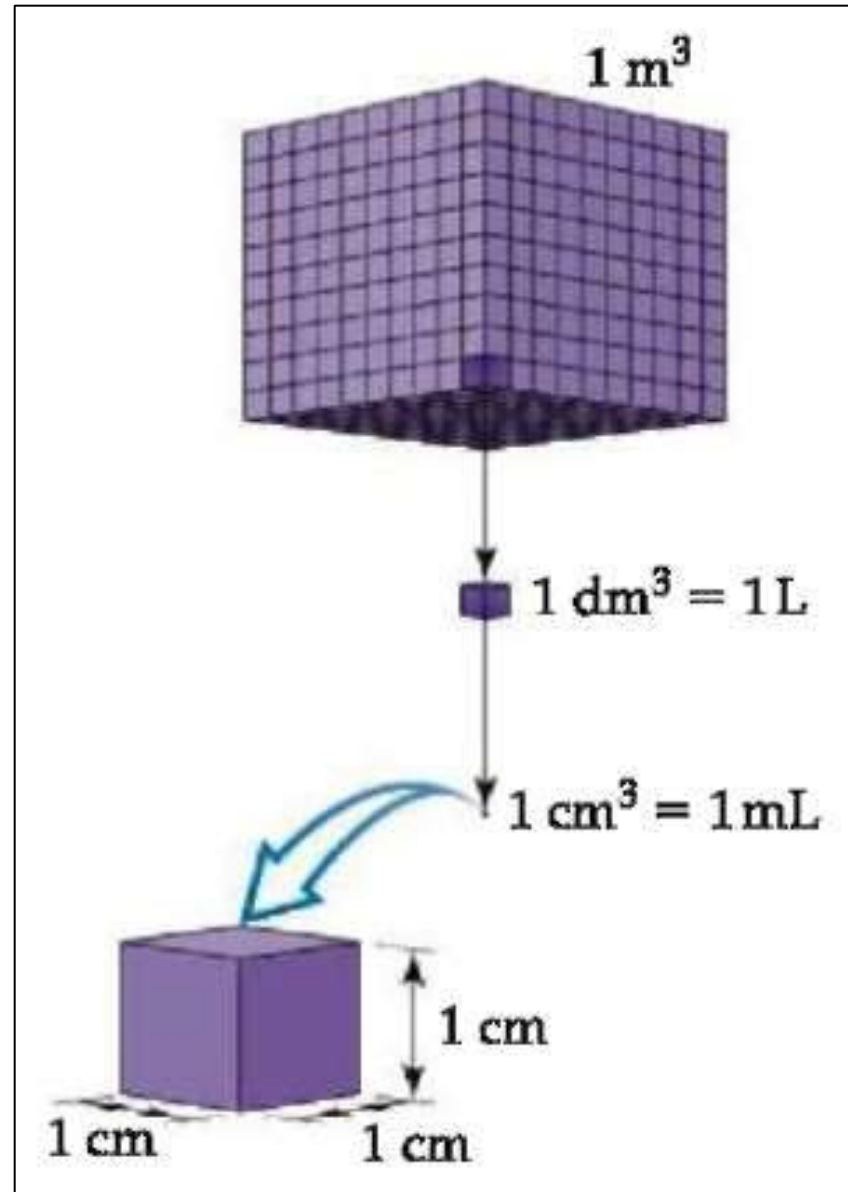


Όγκος

- Δηλαδή: $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$ και $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}$.
- Επίσης ισχύει ότι $1 \text{ mL} = 10^{-3} \text{ L}$.
- Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$.

$$1 \text{ mL} = 10^{-3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} \times (10 \text{ cm})^3 = \\ 10^{-3} \times 10^3 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cm}^3$$

Όγκος



Πίεση (Pressure)



- Η **πίεση** ορίζεται ως το πηλίκο της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας:

$$P = \frac{F}{A} \quad (2.3)$$

- ✓ Όπου P η πίεση, με διαστάσεις $M/(L \cdot T^2)$, και μονάδες στο SI: $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
- ✓ F η δύναμη με διαστάσεις $M \cdot L/T^2$, και μονάδες στο SI: $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$.
- ✓ Α το εμβαδόν της επιφάνειας, με διαστάσεις L^2 , και μονάδες στο SI: m^2 .

Πίεση



- Η μονάδα μέτρησης της πίεσης στο SI είναι το pascal, σύμβολο Pa, το οποίο εξ' ορισμού ισούται με $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.
- Εύκολα αποδεικνύεται ότι $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

- Κατά συνέπεια, οι διαστάσεις της πίεσης είναι: $\text{M}/(\text{L} \cdot \text{T}^2)$.



- Επιπλέον, χρησιμοποιούνται ευρέως οι εξής μονάδες μέτρησης της πίεσης:
 - ✓ $1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}$
 - ✓ $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$
 - ✓ $1 \text{ atm} = 760 \text{ torr}$
 - ✓ $1 \text{ torr} \approx 1 \text{ mmHg}$



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Οι μονάδες μέτρησης των ποσοτήτων αντιμετωπίζονται ως αλγεβρικές οντότητες κατά την πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων.
- Οι αριθμητικές τιμές δύο ποσοτήτων μπορούν να προστεθούν, να αφαιρεθούν ή να εξισωθούν μόνο αν έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης:
$$3 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm} \quad (3x - 1x = 2x)$$
$$5 \text{ kg} + 3 \text{ J} = ??? \quad (5x + 3y = ???)$$
$$3 \text{ cm} - 1 \text{ mm} = ??? \quad (3x - y = ???)$$
- Η πράξη $3 \text{ cm} - 1 \text{ mm}$ μπορεί να γίνει μόνο αν μετατραπούν οι μονάδες ώστε να είναι ίδιες.



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Οι αριθμητικές τιμές των μεγεθών και οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης μπορούν να πολλαπλασιαστούν ή να διαιρεθούν με οποιοδήποτε τρόπο:

$$3,0 \text{ N} \times 4,0 \text{ m} = 12 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \frac{5,0 \text{ km}}{2,0 \text{ h}} = 2,5 \text{ km/h}$$

$$7,0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 4,0 \text{ h} = 28 \text{ km} \qquad 3,0 \text{ m} \times 4,0 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$$

$$\frac{6 \text{ g}}{2 \text{ g}} = 3 \text{ (αδιάστατη ποσότητα)} \qquad (5,0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}) / (0,20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) = 25 \text{ m}^3 / \text{s}$$



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Ωστόσο η απλοποίηση των μονάδων γίνεται μόνο αν αυτές είναι ίδιες.

$$\frac{3 \text{ m}^2}{60 \text{ cm}} = \frac{3 \text{ m}^2}{0,6 \text{ m}} = 5 \text{ m}$$



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Έστω η εξίσωση $S = \log A$, όπου A είναι το εμβαδόν μιας επιφάνειας, με διαστάσεις L^2 .
- Έστω μια επιφάνεια με εμβαδόν 16 m^2 .
- Οπότε, $S = \log(16 \text{ m}^2)$.
- Ποιες είναι οι μονάδες του S ;
- Έστω ότι $S = 3$, οπότε:

$$S = \log A \Leftrightarrow A = 10^S = 10^3$$

- Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του S ώστε οι διαστάσεις του A να είναι L^2 ;
- Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και για το $\ln$, 10^x , e^x , $\sin$ και $\cos$.



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Υπάρχουν δύο τρόποι για να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω πρόβλημα.
- Ο πρώτος είναι να θεωρήσουμε ότι οι παραστάσεις οι οποίες είναι μέσα στο $\log$, $\ln$, 10^x , e^x , $\sin$ και $\cos$ είναι αδιάστατες, ακόμα και αν έχουν διάστασεις.
- Μια δεύτερη, πιο αυστηρή μαθηματικά θεμελίωση, περιλαμβάνει την παρακάτω διαδικασία:



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

- Έστω η εξίσωση $S = \log A$.
- Στην πραγματικότητα, η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να οριστεί, μια και το A πρέπει να είναι αδιάστατο.
- Για να ξεπεράσουμε το παραπάνω πρόβλημα, ορίζουμε μία νέα μεταβλητή, την $A^* = A/A^\circ$, όπου $A^\circ = 1 \text{ m}^2$.
- Οπότε η εξίσωση ορίζεται ως $S = \log A^*$.



Πράξεις με τις μονάδες μέτρησης

➤ Κατά συνέπεια αν $A = 16 \text{ m}^2$, τότε έχουμε $A^* = 16$ και $S = \log 16$ (αδιάστατο!!!).

➤ Αν $S = 3$, τότε:

$$S = \log A^* \Leftrightarrow A^* = 10^S = 10^3$$

➤ Άρα $A = A^* \times A^0 = 10^3 \text{ m}^2$.

➤ Τις περισσότερες φορές (αν όχι πάντα!!!) η παραπάνω διαδικασία παραλείπεται για λόγους απλότητας, και θεωρούμε ότι οι παραστάσεις που βρίσκονται εντός των $\log$, $\ln$, 10^x , e^x , $\sin$ και $\cos$ είναι **αδιάστατες**, ακόμα και αν έχουν διαστάσεις!!!

Άσκηση 2.1



➤ Να προσθέσετε τις παρακάτω ποσότητες:

i. $1 \text{ kg} + 3 \text{ s}$

ii. $1 \text{ hp (horsepower, ίππος)} + 300 \text{ W}$

Δίνεται ότι $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$.

Ερωτήσεις



8. Να απαντήσετε με ένα «ναι» ή με ένα «όχι» στις παρακάτω ερωτήσεις: Μπορείτε να:

- i. διαιρέσετε m με s ;
- ii. διαιρέσετε m με cm ;
- iii. πολλαπλασιάσετε m με s ;
- iv. διαιρέσετε ft με cm ;
- v. διαιρέσετε m με βαθμούς K ;
- vi. προσθέσετε m και s ;
- vii. αφαιρέσετε m από βαθμούς K ;
- viii. προσθέσετε cm και m^2 ;
- ix. προσθέσετε 1 και $2\ cm$;



Άσκηση 2.2

- Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:
 - i. Να προσθέσετε 1 cm και 1,00 m.
 - ii. Να αφαιρέσετε 3 ft από 4 yd.
 - iii. Να διαιρέσετε $3,0 \text{ m}^{1,5}$ διά $2,0 \text{ m}^{0,5}$.
 - iv. Να πολλαπλασιάσετε 2 m επί 4 kg.
- Δίνεται ότι $1 \text{ yd} = 3 \text{ ft}$

Άσκηση 2.3 (Θέμα εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2012)



➤ Ποιο είναι το σωστό σύμβολο για τη μονάδα μέτρησης μιας θεμελιώδους ποσότητας στο SI; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- a. sec
- b. nm
- c. °K
- d. N/mm

Άσκηση 2.4 (Θέμα εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2012)



- Τα παρακάτω σύμβολα αναφέρονται στις διαστάσεις φυσικών ποσοτήτων στο SI.
- Ποιο σύμβολο είναι λανθασμένο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - i. $M \cdot L^{-3}$
 - ii. $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
 - iii. Θ/M
 - iv. $A \cdot T$

Όταν ξεκινούσε δεν ήξερε που πήγαινε ...



- Ο Χριστόφορος Κολόμβος κατά το σχεδιασμό του ταξιδιού του από την Ισπανία στην Ανατολική Ασία, μέσω του Ατλαντικού Ωκεανού, έκανε μια σειρά από λανθασμένες εκτιμήσεις και υπολογισμούς.



Christopher Columbus
1451–1506

- Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά σφάλματα στους υπολογισμούς του ήταν το εξής:

... όταν έφτασε δεν ήξερε που ήτανε ...



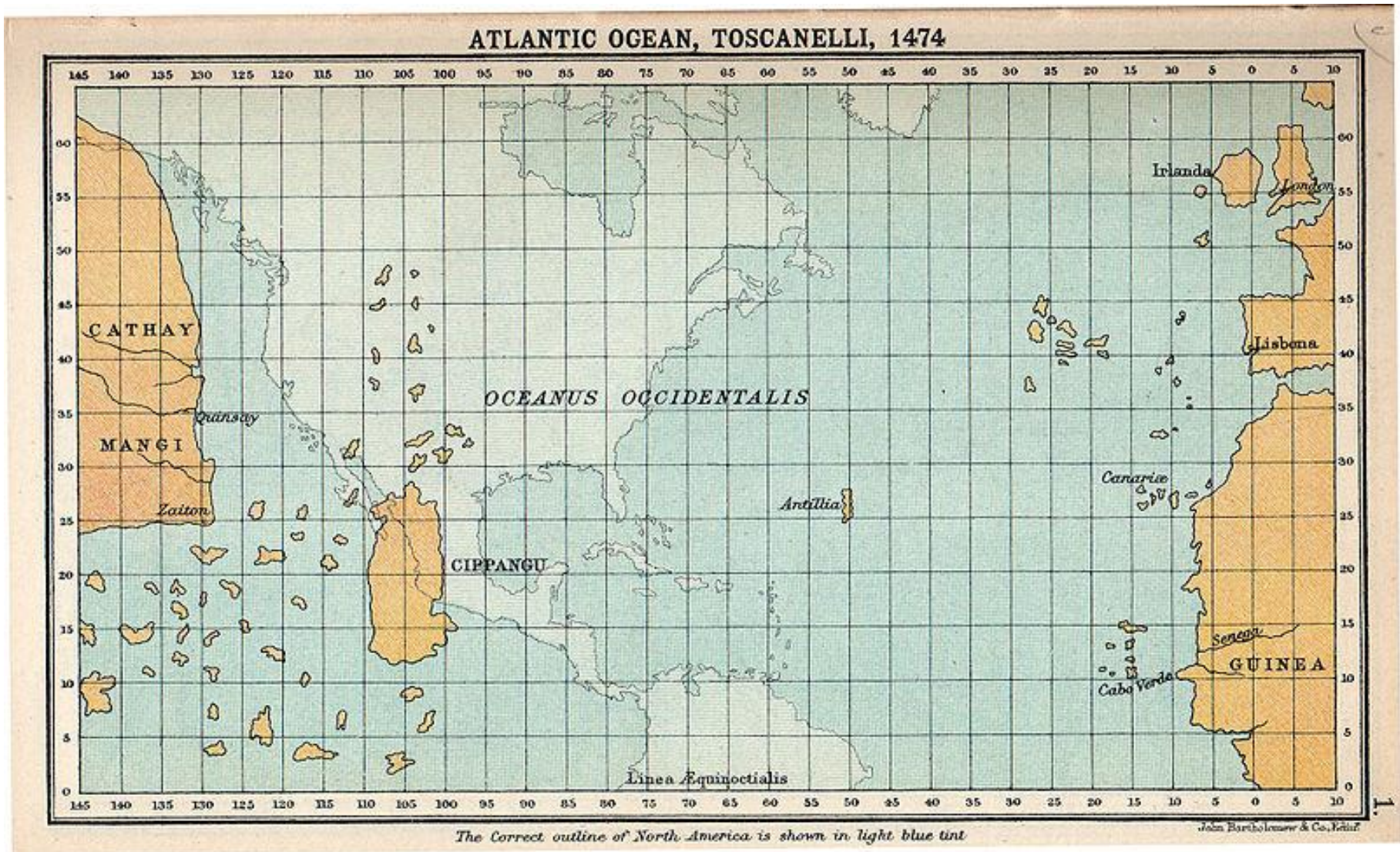
- Από Λατινικές μεταφράσεις Αραβικών αστρονομικών κειμένων του 9^{ου} αιώνα, γνώριζε ότι 1 μοίρα γεωγραφικού μήκους στον Ισημερινό αντιστοιχούσε σε περίπου 50 ναυτικές μονάδες μήκους (miles).
- Ωστόσο, νόμιζε λανθασμένα, ότι η απόσταση αυτή είχε εκφραστεί στη μονάδα μέτρησης του μήκους η οποία χρησιμοποιούνταν στην εποχή του (Ρωμαϊκό μίλι, περίπου 1,2 km).
- Στην πραγματικότητα, η απόσταση αυτή είχε εκφραστεί στην Αραβική ναυτική μονάδα μήκους (Αραβικό μίλι, περίπου 1,8-1,9 km).

και όταν γύριζε δεν ήξερε από πού ερχότανε!!!

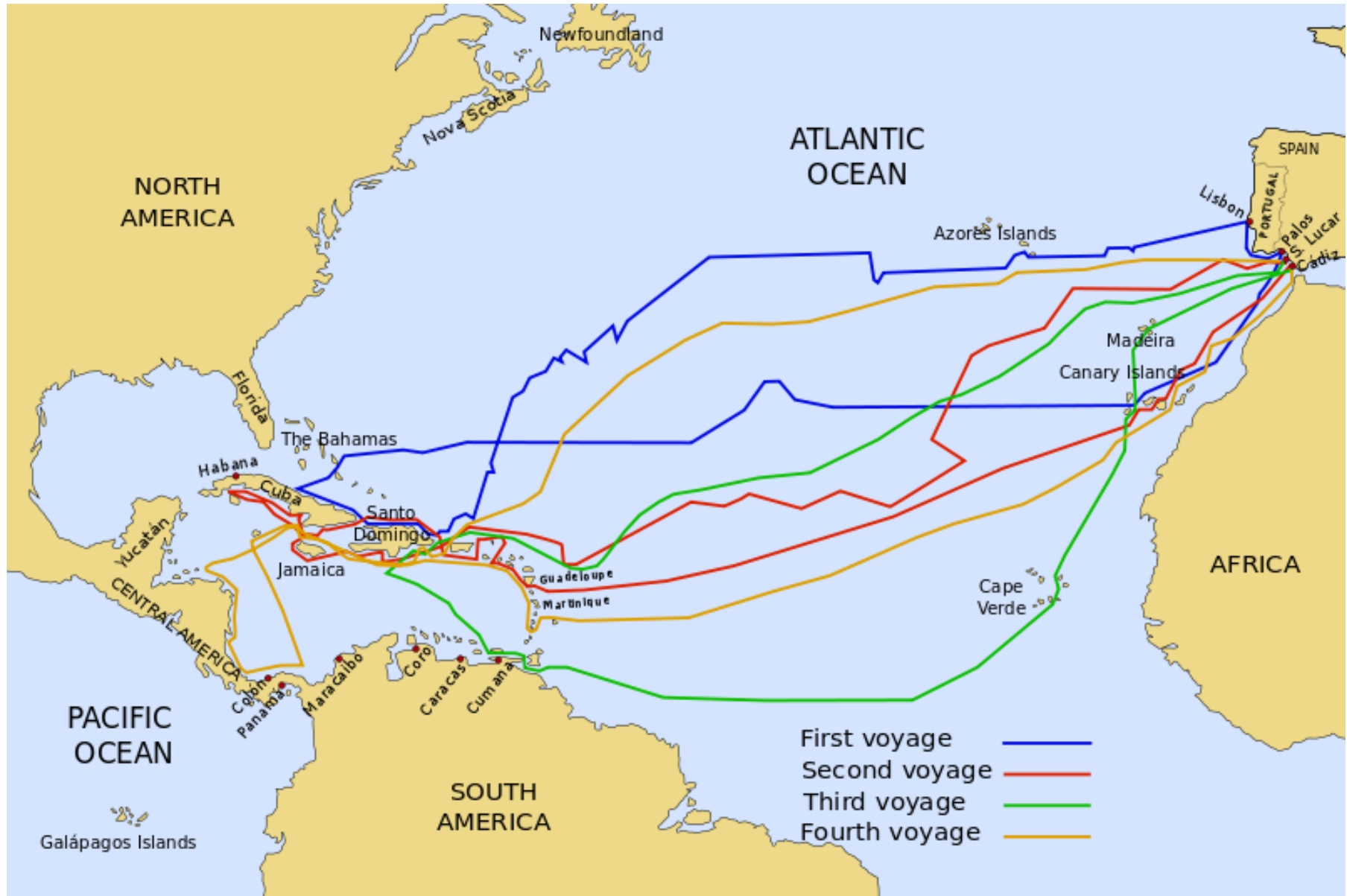


- Αυτό, σε συνδυασμό με άλλες λανθασμένες παραδοχές, τον οδήγησε στο να εκτιμήσει ότι η απόσταση την οποία έπρεπε να ταξιδέψει ήταν περίπου 4100 km, ενώ στην πραγματικότητα ήταν περίπου 6200 km!!!
- Ενδεχομένως αν είχε υπολογίσει σωστά την απόσταση δε θα αποτολμούσε το ομολογουμένως παράτολμο ταξίδι του, το οποίο τον οδήγησε στην ανακάλυψη της Αμερικής.

Χάρτης του Ατλαντικού Ωκεανού του 1474



Τα ταξίδια του Κολόμβου



Μετατροπές των μονάδων



- Μια μετρούμενη ποσότητα μπορεί να εκφραστεί σε διάφορες μονάδες μέτρησης οι οποίες έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις:
- π.χ. ταχύτητα = μήκος/χρόνος (διαστάσεις L/T), εκφράζεται σε m/s, km/h, mi/h, ft/s, ...
- Η αριθμητική τιμή της ποσότητας προφανώς εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης.
- Για να μετατρέψουμε μία μονάδα μέτρησης σε μια άλλη μονάδα μέτρησης του ίδιου ή διαφορετικού συστήματος χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλους **συντελεστές μετατροπής (conversion factors)**.



Συντελεστές μετατροπής

- Η ισοδυναμία μεταξύ δύο εκφράσεων της ίδιας ποσότητας μπορεί να εκφραστεί ως ένας λόγος, ο οποίος ονομάζεται **συντελεστής μετατροπής** (conversion factor)

$$\frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ mm}} \quad \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} \quad \left(\frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} \right)^2 = \frac{100 \text{ mm}^2}{1 \text{ cm}^2}$$

$$\frac{1 \text{ mi}}{1610 \text{ m}} \quad \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \quad \frac{1 \text{ atm}}{1,013 \text{ bar}}$$

Συντελεστές μετατροπής



- Οι συντελεστές μετατροπής είναι κλάσματα, τα οποία έχουν τιμή 1.
- Κατά συνέπεια, ο πολλαπλασιασμός ενός όρου με τον κατάλληλο συντελεστή μετατροπής ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του όρου αυτού με τη μονάδα, 1.
- Γνωρίζουμε για παράδειγμα ότι $1 \text{ mi} = 1,61 \text{ km}$.
- Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση αυτή ως εξής:

$$1 \text{ mi} = 1,61 \text{ km} \Leftrightarrow \frac{1,61 \text{ km}}{1 \text{ mi}} = \frac{1 \text{ mi}}{1,61 \text{ km}} = 1$$

Άσκηση 2.5



- Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 65,0 mi/h. Να μετατρέψετε την ταχύτητα αυτή σε km/h και σε m/s. Δίνεται ότι 1 mi = 1,61 km.

$$\frac{65,0 \text{ mi}}{\text{h}} = \frac{65,0 \text{ mi}}{\text{h}} \times 1 = \frac{\cancel{65,0 \text{ mi}}}{\text{h}} \times \frac{1,61 \text{ km}}{\cancel{1 \text{ mi}}} = \frac{105 \text{ km}}{\text{h}}$$

$$\frac{\cancel{105 \text{ km}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\cancel{1 \text{ km}}} \times \frac{\cancel{1 \text{ h}}}{60 \cancel{\text{ min}}} \times \frac{\cancel{1 \text{ min}}}{60 \text{ s}} = \frac{29,2 \text{ m}}{\text{s}}$$

Άσκηση 2.6



- Ένα αεροπλάνο ταξιδεύει με ταχύτητα διπλάσια από την ταχύτητα του ήχου. Να μετατρέψετε την ταχύτητα αυτή σε km/h και σε mi/h.
- Δίνεται ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 340 m/s και ότι $1 \text{ mi} = 1,61 \text{ km}$.

Άσκηση 2.7



- Η παροχή μιας εργαστηριακής αντλίας είναι $400 \text{ in}^3/\text{day}$.
- Να μετατρέψετε την παροχή αυτή σε mL/min .
- Δίνεται ότι: $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$ και $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

Άσκηση 2.8



- Το μέγεθος των σωματιδίων ενός ημιαγωγού είναι 1,8 nm. Να μετατρέψετε την τιμή αυτή σε:
 - i. dm
 - ii. in
- Δίνεται ότι: $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$.

Άσκηση 2.9



- Η επιτάχυνση ενός αντικειμένου ισούται με 1 cm/s^2 .
- Να μετατρέψετε την επιτάχυνση αυτή σε μονάδες km/y^2 .

Άσκηση 2.9



- Ποια είναι η μάζα ενός αντικειμένου το οποίο ζυγίζει $9,80 \text{ kN}$ στο επίπεδο της θάλασσας;

Διαστασιακή συνέπεια



- Μια βασική αρχή λέει ότι οι εξισώσεις πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις και στα δύο μέλη τους: **διαστασιακή συνέπεια ή ομοιογένεια (dimensional consistency or homogeneity)**.
- Κάθε όρος μιας εξίσωσης πρέπει να έχει τις ίδιες διαστάσεις και μονάδες με όλους τους υπόλοιπους όρους με τους οποίους προστίθεται, αφαιρείται ή εξισώνεται.
- Η παραπάνω αρχή βοηθάει στην εύρεση των διαστάσεων και των μονάδων των διαφόρων όρων μίας εξίσωσης.

Άσκηση 2.10



- Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων δίνεται από την εξίσωση:

$$PV = nRT$$

- ✓ όπου P: η πίεση του αερίου
- ✓ V: ο όγκος του δοχείου
- ✓ T: η απόλυτη θερμοκρασία, σε βαθμούς Kelvin
- ✓ n: τα mol του αερίου
- ✓ R: η παγκόσμια σταθερά των αερίων

Άσκηση 2.10



- Στο SI η πίεση, P , μετριέται σε $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ με διαστάσεις $\text{M}/(\text{L} \cdot \text{T}^2)$ και ο όγκος, V , μετριέται σε m^3 με διαστάσεις L^3 .
- i. Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις της σταθεράς R στο SI.
- ii. Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις της σταθεράς R , αν η πίεση μετριέται σε ατμόσφαιρες (atm) και ο όγκος σε λίτρα (L).

Άσκηση 2.10



- iii. Να υπολογίσετε το συντελεστή μετατροπής των μονάδων της σταθεράς R μεταξύ του SI και των μονάδων μέτρησης του ερωτήματος (ii).
- iv. Αν στο SI η παγκόσμια σταθερά των αερίων, R , έχει τιμή 8,314510 να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς R στις μονάδες του ερωτήματος (ii).
- Δίνεται ότι $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$ και $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.



Άσκηση 2.10: Απάντηση

- Ο όρος PV έχει μονάδες πίεση $\times$ όγκος.
- Άρα ο όρος nRT θα πρέπει επίσης να έχει μονάδες πίεση $\times$ όγκος.
- Οπότε γράφουμε με τη μορφή εξίσωσης τις μονάδες του όρου nRT :

$$\text{mol} \cdot R \cdot K = \text{Pa} \cdot \text{m}^3 \Leftrightarrow R = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot K} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{mol} \cdot K} \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{mol} \cdot K} = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot K}$$



Άσκηση 2.10: Απάντηση

- Άρα η παγκόσμια σταθερά των αερίων, R , στο SI έχει μονάδες $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ και διαστάσεις $\text{M} \cdot \text{L}^2/(\text{T}^2 \cdot \text{N} \cdot \Theta)$.
- Αν η πίεση μετριέται σε ατμόσφαιρες (atm) και ο όγκος σε λίτρα (L) τότε πάλι γράφουμε με τη μορφή εξίσωσης τις μονάδες του όρου nRT ως εξής:

$$\text{mol} \cdot R \cdot \text{K} = \text{atm} \cdot \text{L} \Leftrightarrow R = \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$



Άσκηση 2.10: Απάντηση

iii. Για να υπολογίσουμε το συντελεστή μετατροπής των μονάδων της σταθεράς R μεταξύ του SI και των μονάδων μέτρησης του ερωτήματος (ii) εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{101,325 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \\ &= 101,325 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 101,325 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.10: Απάντηση



➤ Δηλαδή:

$$1 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 101,325 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

➤ Ή:

$$1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{1}{101,325} \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 9,86923 \cdot 10^{-3} \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

➤ Οπότε:

$$R = 8,314510 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,314510 \cdot 9,86923 \cdot 10^{-3} \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$R = 0,0820578 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Άσκηση 2.11



- Η καταστατική εξίσωση των πραγματικών αερίων δίνεται από την εξίσωση van der Waals:

$$\left(P + \frac{n^2 \alpha}{V^2} \right) \cdot (V - nb) = nRT$$

- ✓ όπου P : η πίεση του αερίου
- ✓ V : ο όγκος του δοχείου
- ✓ T : η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin
- ✓ n : τα mol του αερίου
- ✓ R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων
- ✓ α και b : σταθερές

Άσκηση 2.11



- Στο SI η πίεση, P , μετριέται σε $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ με διαστάσεις $\text{M}/(\text{L} \cdot \text{T}^2)$ και ο όγκος, V , μετριέται σε m^3 με διαστάσεις L^3 .
- i. Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις των σταθερών a , b και R στο SI.
- **Απάντηση:**
- Ο όρος $n^2 a / V^2$ πρέπει να έχει διαστάσεις και μονάδες πίεσης, ενώ ο όρος $n b$ πρέπει να έχει διαστάσεις και μονάδες όγκου.

Άσκηση 2.11



- Γράφουμε με τη μορφή εξίσωσης τις μονάδες του όρου $n^2\alpha/V^2$:

$$\frac{\text{mol}^2 \cdot \alpha}{(\text{m}^3)^2} = \text{Pa} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{mol}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}^6}{\text{mol}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^5}{\text{s}^2 \cdot \text{mol}^2}$$

- Άρα η σταθερά α στο SI έχει μονάδες $\text{kg} \cdot \text{m}^5/(\text{s}^2 \cdot \text{mol}^2)$ και διαστάσεις $M \cdot L^5/(T^2 \cdot N^2)$.
- Ομοίως, γράφουμε με τη μορφή εξίσωσης τις μονάδες του όρου nb :

$$\text{mol} \cdot b = \text{m}^3 \Leftrightarrow b = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$



Άσκηση 2.11

- Άρα η σταθερά b στο SI έχει μονάδες m^3/mol και διαστάσεις L^3/N .
- Τέλος, ο όρος nRT έχει μονάδες και διαστάσεις πίεση $\times$ όγκος.
- Οπότε πάλι γράφουμε με τη μορφή εξίσωσης τις μονάδες του όρου nRT :

$$\text{mol} \cdot R \cdot \text{K} = \text{Pa} \cdot \text{m}^3 \Leftrightarrow R = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \Leftrightarrow$$
$$R = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Άσκηση 2.11



- Άρα η παγκόσμια σταθερά των αερίων, R , στο SI έχει μονάδες $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ και διαστάσεις $\text{M} \cdot \text{L}^2/(\text{T}^2 \cdot \text{N} \cdot \Theta)$.
- Μια πολύ συνηθισμένη μονάδα μέτρησης της πίεσης, η οποία ωστόσο δεν είναι μονάδα του SI, είναι η ατμόσφαιρα, σύμβολο atm.
- Επίσης, μια πολύ συνηθισμένη μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το λίτρο, σύμβολο L, η οποία επίσης δεν είναι μονάδα του SI, αλλά ανήκει στις εναλλακτικές μονάδες του SI.

Άσκηση 2.11



- ii. Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις των σταθερών α , b και R , αν η πίεση μετριέται σε ατμόσφαιρες (atm) και ο όγκος σε λίτρα (L).
- Τι παρατηρείτε σχετικά με τις διαστάσεις των σταθερών.
- iii. Να υπολογίσετε τους συντελεστές μετατροπής των μονάδων των σταθερών α , b και R μεταξύ του SI και των μονάδων μέτρησης του ερωτήματος (ii).

Άσκηση 2.11



- iv. Αν στο SI η παγκόσμια σταθερά των αερίων, R , έχει τιμή $8,314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς R στις μονάδες του ερωτήματος (ii).
- Δίνεται ότι $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$ και $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

Άσκηση 2.12 (Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2015)



- Δίνεται η παρακάτω εξίσωση:

$$d = 16,2(1 - e^{-0,025t})$$

- όπου το d είναι μήκος και το t είναι χρόνος.
- Να βρείτε τις διαστάσεις και τις μονάδες των σταθερών 16,2 και 0,025 στο SI.

Άσκηση 2.13



- Ο αριθμός Reynolds (σύμβολο Re), ο οποίος απαντάται στη μηχανική των ρευστών, είναι μια αδιάστατη ποσότητα η οποία ορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$Re = \frac{d v \rho}{\mu}$$

- ✓ Όπου d: η διάμετρος του αγωγού διαμέσου του οποίου ρέει το ρευστό
- ✓ v: η ταχύτητα ροής του ρευστού
- ✓ ρ: η πυκνότητα του ρευστού
- ✓ μ: το ιξώδες του ρευστού

Άσκηση 2.13



- i. Να βρείτε τις διαστάσεις και τις μονάδες του ιξώδους στο SI.
- ii. Το εγχειρίδιο της μηχανικής των ρευστών αναγράφει ότι οι μονάδες του ιξώδους είναι $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. Ταυτίζονται οι μονάδες αυτές με τις μονάδες που βρήκατε στο ερώτημα (i);

Άσκηση 2.13



- iii. Αν η διάμετρος του αγωγού μετριέται σε cm, η ταχύτητα ροής του υγρού σε cm/s και η πυκνότητα του υγρού σε g/mL, να βρείτε τις μονάδες του ιξώδους στην περίπτωση αυτή.
- iv. Να υπολογίσετε το συντελεστή μετατροπής της μονάδας μέτρησης του ιξώδους μεταξύ του SI και των μονάδων μέτρησης του ερωτήματος (iii).

Άσκηση 2.14



- Η σταθερά ταχύτητας μιας αντίδρασης βρέθηκε ότι μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία σύμφωνα με την εξίσωση του Arrhenius:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

- όπου k η σταθερά ταχύτητας της αντίδρασης, μετρούμενη σε $\text{L}/(\text{mol}\cdot\text{s})$
- A : σταθερά η οποία ονομάζεται προεκθετικός παράγοντας

Άσκηση 2.14



- E_a : σταθερά η οποία ονομάζεται ενέργεια ενεργοποίησης.
- R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων μετρημένη σε $J/(mol \cdot K)$.
- T : η απόλυτη θερμοκρασία μετρημένη σε βαθμούς Kelvin (K).
- Να υπολογίσετε τις μονάδες και τις διαστάσεις των σταθερών A και E_a στο SI.

Άσκηση 2.15



- Να εξηγήσετε χωρίς να παραγωγίσετε γιατί η επόμενη εξίσωση δεν μπορεί να ισχύει:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1 + (x^2 / a^2)} = \frac{2ax}{\sqrt{1 + (x^2 / a^2)}}$$



Άσκηση 2.16

- Δίνεται η παρακάτω εξίσωση:

$$u = c \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

- ✓ όπου u : η ταχύτητα ροής ενός ρευστού σε ένα σωλήνα
- ✓ c : σταθερά
- ✓ ΔP : πτώση πίεσης
- ✓ ρ : πυκνότητα του ρευστού
- Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις της σταθεράς c στο SI.

Άσκηση 2.17



➤ Δίνεται η παρακάτω εξίσωση:

$$k = A e^{\frac{B}{T}}$$

- ✓ όπου k : η θερμική αγωγιμότητα σε μονάδες $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- ✓ A και B : σταθερές
- ✓ T : απόλυτη θερμοκρασία, σε K
- Να βρείτε τις μονάδες και τις διαστάσεις των σταθερών A και B στο SI.



Επιστημονικός συμβολισμός των αριθμών

- Πολύ συχνά στην Επιστήμη και τη Μηχανική εργαζόμαστε είτε με πολύ μεγάλους είτε με πολύ μικρούς αριθμούς, π.χ.:
 - ✓ 123.000.000
 - ✓ 0,000028
- Σύμφωνα με τον επιστημονικό τρόπο γραφής των αριθμών, οι αριθμοί εκφράζονται ως το γινόμενο ενός αριθμού μεταξύ του 1 και του 10 επί μια δύναμη του 10:
 - ✓ $123.000.000 = 1,23 \times 10^8$
 - ✓ $0,000028 = 2,8 \times 10^{-5}$

Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



- Ένας ξεναγός στις πυραμίδες τις Αιγύπτου λέει στους επισκέπτες:
- Οι πυραμίδες έχουν ηλικία 5013 χρόνια!
- Πως το ξέρεις, ρώτησε έντονα απορημένος ένας επισκέπτης?!?!?!?
- Ο ξεναγός απάντησε: όταν ξεκίνησα να δουλεύω ως ξεναγός, πριν από 13 χρόνια, ο προηγούμενος ξεναγός μου είχε πει ότι οι πυραμίδες είχαν ηλικία 5000 χρόνια!!!!



Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



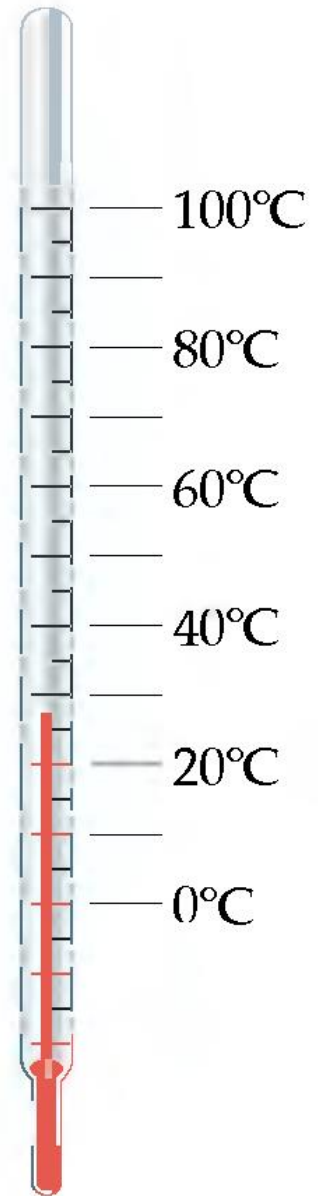
- Υπάρχουν δύο είδη αριθμών στην Επιστήμη και τη Μηχανική:
- οι **ακριβείς αριθμοί (exact numbers)**: οι τιμές τους είναι επακριβώς γνωστές.
- ✓ π.χ. μια ντουζίνα αυγά έχει ακριβώς 12 αυγά
- ✓ ένα κιλό περιέχει ακριβώς 1000 g
- ✓ ένα μέτρο είναι ακριβώς 100 cm
- ✓ Ακριβείς αριθμοί προκύπτουν επίσης από τη μέτρηση αντικειμένων, π.χ. αριθμός ατόμων μέσα στην αίθουσα.



Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις

➤ Οι **μη ακριβείς αριθμοί** (inexact numbers): οι τιμές τους έχουν μια κάποια αβεβαιότητα (uncertainty), η οποία υπεισέρχεται κατά την πραγματοποίηση της μέτρησης
π.χ.:

✓ θερμοκρασία του δωματίου





Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις

➤ Οι μη ακριβείς αριθμοί (inexact numbers): οι τιμές τους έχουν μια κάποια αβεβαιότητα (uncertainty), η οποία υπεισέρχεται κατά την πραγματοποίηση της μέτρησης π.χ.:

✓ ύψος ενός ανθρώπου





Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις

- Κάθε μέτρηση μιας ποσότητας πρέπει να περιλαμβάνει τις εξής τρεις πληροφορίες:
- ✓ το μέγεθος της μετρούμενης ποσότητας
- ✓ τις μονάδες μέτρησής της
- ✓ μια εκτίμηση της αβεβαιότητας η οποία υπεισέρχεται κατά τη μέτρηση

Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



- Οι αριθμοί οι οποίοι προκύπτουν από μετρήσεις φυσικών μεγεθών είναι πάντοτε μη ακριβείς.
- Σε όλες τις μετρήσεις φυσικών μεγεθών υπεισέρχονται σφάλματα τα οποία οφείλονται είτε στα όργανα μέτρηση είτε σε ανθρώπινα σφάλματα.
- Στις μετρούμενες ποσότητες υπάρχει πάντοτε μια κάποια αβεβαιότητα ως προς τη μέτρηση.

Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



➤ Ζυγοί ακριβείας



1 δεκαδικό
ψηφίο



4 δεκαδικά
ψηφία



4 δεκαδικά
ψηφία

Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



- Έστω ότι μετράμε τη μάζα ενός αντικειμένου με ένα ζυγό ο οποίος δίνει ένδειξη μέχρι το πλησιέστερο $0,0001 \text{ g}$, δηλαδή έχει υποδιαίρέσεις ανά $0,0001 \text{ g}$.
- Έστω ότι η μάζα του αντικειμένου είναι $0,2735 \pm 0,0001$.
- Αυτό σημαίνει ότι η μάζα του αντικειμένου είναι μεταξύ $0,2734$ και $0,2736$ με πλησιέστερη τιμή το $0,2735$.

Αβεβαιότητα κατά τις μετρήσεις



0,2735

βέβαια
ψηφία

αβέβαιο ψηφίο

- Συνήθως οι μετρούμενες ποσότητες αναγράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε μόνο το τελευταίο ψηφίο να είναι αβέβαιο.

Ερώτηση



- Έστω ότι μετράμε τη μάζα ενός αντικειμένου σε δύο διαφορετικούς ζυγούς και οι ενδείξεις που καταγράφουμε είναι $4,0\text{ g}$ και $4,00\text{ g}$. Ποια μέτρηση έχει τη μικρότερη αβεβαιότητα;
- Απάντηση: η μέτρηση $4,0\text{ g}$ σημαίνει ότι η μάζα του αντικειμένου είναι μεταξύ $3,9\text{ g}$ και $4,1\text{ g}$, ενώ η μέτρηση $4,00$ σημαίνει ότι η μάζα του αντικειμένου είναι μεταξύ $3,99\text{ g}$ και $4,01\text{ g}$.
- Άρα η δεύτερη μέτρηση έχει μικρότερη αβεβαιότητα ή μεγαλύτερη ακρίβεια.

Σημαντικά ψηφία



- Ως **σημαντικά ψηφία (significant figures)** ενός αριθμού, ο οποίος εκφράζει μια **μετρούμενη ποσότητα**, θεωρούνται όλα τα ψηφία τα οποία είναι γνωστά με βεβαιότητα (βέβαια ψηφία) και το αβέβαιο ψηφίο, π.χ.
 - ✓ $2,2405 \rightarrow$ πέντε σημαντικά ψηφία
 - ✓ $2,2 \text{ g} \rightarrow$ δύο σημαντικά ψηφία
- Όλα τα ψηφία μιας μετρούμενης ποσότητας ονομάζονται **σημαντικά ψηφία**.



Σημαντικά ψηφία

- Για την εύρεση των σημαντικών ψηφίων μιας μετρούμενης ποσότητας διαβάζουμε τον αριθμό από αριστερά προς τα δεξιά και μετράμε όλα τα μη μηδενικά ψηφία, π.χ.
 - ✓ $23,54 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
 - ✓ $1,23 \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία
- Σε ότι αφορά τα μηδενικά ψηφία ισχύουν οι επόμενοι κανόνες:

Σημαντικά ψηφία



- Τα μηδενικά ψηφία τα οποία βρίσκονται μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι πάντοτε σημαντικά: π.χ.:
 - ✓ $1005 \text{ kg} \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
 - ✓ $1,03 \text{ cm} \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία.
- Μηδενικά ψηφία στην αρχή ενός αριθμού δεν είναι σημαντικά ψηφία. Απλώς δείχνουν τη θέση της υποδιαστολής: π.χ.:
 - ✓ $0,02 \text{ g} \rightarrow$ ένα σημαντικό ψηφίο
 - ✓ $0,0026 \text{ cm} \rightarrow$ δύο σημαντικά ψηφία



Σημαντικά ψηφία

➤ Μηδενικά ψηφία στο τέλος ενός αριθμού είναι σημαντικά όταν ο αριθμός περιέχει δεκαδικά ψηφία π.χ.:

- ✓ $0,0200 \text{ g} \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία
- ✓ $3,0 \text{ cm} \rightarrow$ δύο σημαντικά ψηφία
- ✓ $3,00 \text{ cm} \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία
- ✓ $0,00260 \text{ g} \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία



Σημαντικά ψηφία

- Προκύπτει πρόβλημα κατά την εύρεση των σημαντικών ψηφίων όταν ο αριθμός περιέχει μηδενικά ψηφία στο τέλος, αλλά δεν έχει δεκαδικά ψηφία, π.χ.:
 - ✓ 100
 - ✓ 12.000
- Στις περιπτώσεις αυτές, κατά κανόνα τα μηδενικά ψηφία δεν θεωρούνται σημαντικά:
 - ✓ 100 → ένα σημαντικό ψηφίο
 - ✓ 12.000 → δύο σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ψηφία



- Στις περιπτώσεις αυτές συχνά χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός ώστε να αρθεί η αμφιβολία για τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων:
- ✓ $100 \rightarrow$ ένα σημαντικό ψηφίο
 - ✓ $100, \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία
 - ✓ $100,0 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
 - ✓ $12.000 \rightarrow$ δύο σημαντικά ψηφία
 - ✓ $12.000, \rightarrow$ πέντε σημαντικά ψηφία
 - ✓ $12.000,0 \rightarrow$ έξι σημαντικά ψηφία



Σημαντικά ψηφία

- Κατά την γραφή των αριθμών με εκθετική μορφή, οι εκθετικοί παράγοντες δεν συνεισφέρουν στον αριθμό των σημαντικών ψηφίων.
- Για παράδειγμα έστω ότι η ζύγιση ενός αντικειμένου έδωσε το αποτέλεσμα 10300 g.
 - ✓ $1,03 \times 10^4$ g → τρία σημαντικά ψηφία
 - ✓ $1,030 \times 10^4$ g → τέσσερα σημαντικά ψηφία
 - ✓ $1,0300 \times 10^4$ g → πέντε σημαντικά ψηφία
- $6,022142 \times 10^{23}$ (αριθμός Avogadro) → επτά σημαντικά ψηφία
- $6,022 \times 10^{23}$ (αριθμός Avogadro) → τέσσερα σημαντικά ψηφία



Σημαντικά ψηφία

- Οι ακριβείς αριθμοί θεωρείται ότι έχουν άπειρα σημαντικά ψηφία.
- ✓ μια ντουζίνα αυγά έχει ακριβώς 12 αυγά → άπειρα σημαντικά ψηφία
- ✓ ένα κιλό περιέχει ακριβώς 1000 g → άπειρα σημαντικά ψηφία
- ✓ ένα μέτρο είναι ακριβώς 100 cm → άπειρα σημαντικά ψηφία
- Οι ακέραιοι αριθμοί επίσης έχουν άπειρα σημαντικά ψηφία, π.χ. 2 → άπειρα σημαντικά ψηφία.

Σημαντικά ψηφία



- Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων σε μια μετρούμενη ποσότητα μας δίνει μια ένδειξη της ακρίβειας με την οποία είναι γνωστή η τιμή της ποσότητας:
- **Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων τόσο μεγαλύτερη είναι και η ακρίβεια της μέτρησης.**

Άσκηση 2.18



➤ Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν οι παρακάτω αριθμοί οι οποίοι αντιπροσωπεύουν μετρούμενες ποσότητες:

i. 4,003

ii. 5000

iii. 3,549

iv. $2,3 \times 10^4$

v. $2,300 \times 10^4$

vi. 0,00134

vii. 23.040

Άσκηση 2.19



➤ Απάντηση:

- i. $4,003 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
- ii. $5000 \rightarrow$ ένα σημαντικό ψηφίο
- iii. $3,549 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
- iv. $2,3 \times 10^4 \rightarrow$ δύο σημαντικά ψηφία
- v. $2,300 \times 10^4 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία
- vi. $0,00134 \rightarrow$ τρία σημαντικά ψηφία
- vii. $23.040 \rightarrow$ τέσσερα σημαντικά ψηφία

Στρογγυλοποίηση αριθμών



- Αν ένα ψηφίο είναι μικρότερο από το 5 και η στρογγυλοποίηση γίνεται στο αμέσως προηγούμενο ψηφίο, τότε το ψηφίο αυτό παραμένει ως έχει, π.χ.:
 - ✓ $7,248 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο $\rightarrow 7,2$
 - ✓ $0,1283 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο $\rightarrow 0,128$
 - ✓ $78.300 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση στις χιλιάδες $\rightarrow 78.000$



Στρογγυλοποίηση αριθμών

- Αν ένα ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 5 και η στρογγυλοποίηση γίνεται στο αμέσως προηγούμενο ψηφίο, τότε το ψηφίο αυτό αυξάνεται κατά μία μονάδα: π.χ.:
 - ✓ $4,735 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο $\rightarrow 4,74$
 - ✓ $2,376 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση σε δύο σημαντικά ψηφία $\rightarrow 2,4$
 - ✓ $78.500 \rightarrow$ στρογγυλοποίηση στις χιλιάδες $\rightarrow 79.000$

Σημαντικά ψηφία κατά τους υπολογισμούς



- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση: το αποτέλεσμα έχει τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με τη μέτρηση με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.
- Αν το αποτέλεσμα περιέχει πιο πολλά ψηφία από τα σημαντικά, τότε πρέπει να στρογγυλοποιηθεί, π.χ.:
$$6,221 \text{ cm} \times 5,2 \text{ cm} = 32,3492 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

στρογγυλοποίηση στο 32 cm^2 (δύο σημαντικά ψηφία)

Σημαντικά ψηφία κατά τους υπολογισμούς



➤ Πολλαπλασιασμός και διαίρεση:

$$\frac{(5,2 \times 10^{-4}) \cdot (0,1635 \times 10^7)}{2,67} = 318,4269663 \rightarrow$$

στρογγυλοποίηση στο $3,2 \times 10^2$ ή **320** (δύο σημαντικά ψηφία).

➤ Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου, L , ακτίνας $r = 3,2$ cm.

➤ Απάντηση: $L = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,2 = 20,096$ cm $\rightarrow$ στρογγυλοποίηση στο **20**, cm (δύο σημαντικά ψηφία).

Σημαντικά ψηφία κατά τους υπολογισμούς



- **Πρόσθεση και αφαίρεση**: συγκρίνουμε τη θέση του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού ως προς την υποδιαστολή.
- Από αυτές τις θέσεις, αυτή που βρίσκεται περισσότερο προς τα αριστερά είναι η θέση του τελευταίου επιτρεπτού σημαντικού ψηφίου του αθροίσματος ή της διαφοράς:

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 20,42 & + & 1,322 & + & 83,1 & = & 104,842 & \Rightarrow \end{array}$$

στρογγυλοποίηση στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο,
δηλαδή 104,**8**



Σημαντικά ψηφία κατά τους υπολογισμούς

➤ Πρόσθεση και αφαίρεση:

$$\begin{array}{r} 1530 \\ -2,56 \\ \hline \end{array}$$

1527,44 $\Rightarrow$ στρογγυλοποίηση στις δεκάδες,
δηλαδή 1530

$$1,0000 + 0,036 + 0,22 = 1,2560 \Rightarrow$$

στρογγυλοποίηση στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο,
δηλαδή 1,26



Σημαντικά ψηφία κατά τους υπολογισμούς

➤ Πρόσθεση και αφαίρεση:

$$2,75 \times 10^6 + 3,400 \times 10^4 = (2,75 + 0,03400) \times 10^6$$

= $\Rightarrow$ στρογγυλοποίηση στο
δεύτερο δεκαδικό ψηφίο,
δηλαδή $2,78 \times 10^6$

2,784000 $\times 10^6$

Άσκηση 2.20



- Να εκφράσετε τις παρακάτω μετρούμενες ποσότητες με τον επιστημονικό τρόπο γραφής των αριθμών και να προσδιορίσετε κάθε φορά τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων:
- i. 12.200
 - ii. 12.200,0
 - iii. 0,003040
 - iv. 0,0000000456048

Άσκηση 2.21



➤ Να εκφράσετε τις παρακάτω μετρούμενες ποσότητες με τον κλασσικό τρόπο γραφής των αριθμών και να προσδιορίσετε κάθε φορά τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων:

i. $1,34 \times 10^5$

ii. $1,340 \times 10^{-2}$

iii. $0,00420 \times 10^6$

iv. $342,0540 \times 10^{-8}$

Άσκηση 2.22



➤ Να εκφράσετε το αποτέλεσμα της κάθε μιας από τις παρακάτω πράξεις με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων:

i. $1,000 + 10,2 =$

ii. $18,76 - 7 =$

iii. $\frac{5,74 \cdot 38,27}{0,001250} =$

iv. $(1,76 \times 10^4) \cdot (0,12 \times 10^{-6}) =$

Άσκηση 2.23



➤ Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς σε τρία σημαντικά ψηφία:

i. 1465

ii. 13,35

iii. $1,765 \times 10^{-7}$

iv. 123.574

v. 1260005

Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων



- Κατά τη λύση των προβλημάτων, τόσο στα πλαίσια των μαθημάτων κατά τη διάρκεια των σπουδών σας, όσο και στην επαγγελματική σας σταδιοδρομία, δύο κρίσιμες ερωτήσεις θα σας απασχολήσουν:
 - ✓ Πως θα λύσω το πρόβλημα?
 - ✓ Όταν το λύσω, πως θα ξέρω ότι το έλυσα σωστά?
- Συχνά σκεφτόμαστε μόνο την πρώτη ερώτηση.
- Ωστόσο, και η δεύτερη ερώτηση είναι εξίσου σημαντική.



Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων

- Θα πρέπει να αποκτήσουμε τη συνήθεια να αναρωτιόμαστε αν έχουμε λύσει σωστά ένα πρόβλημα.
- Θα πρέπει να αναπτύξουμε στρατηγικές ώστε να μπορούμε να βεβαιωνόμαστε ότι έχουμε λύσει το πρόβλημα σωστά.
- Αν δεν μπορούμε να συγκρίνουμε την τιμή την οποία βρήκαμε κατά την επίλυση ενός προβλήματος με μια γνωστή τιμή (παράρτημα λύσεων των ασκήσεων) τότε πρέπει να αναπτύξουμε στρατηγικές αξιολόγησης της λύσης των προβλημάτων.

Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων



- Μερικές προτεινόμενες στρατηγικές επιβεβαίωσης των λύσεων των προβλημάτων είναι οι εξής:
- ✓ να επαναλαμβάνετε τους υπολογισμούς, και αν είναι δυνατόν με διαφορετική σειρά
- ✓ να ξεκινάτε με την απάντηση του προβλήματος και να κάνετε τους υπολογισμούς με την αντίστροφη σειρά
- ✓ να επανεκτιμάτε τις παραδοχές και τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος

Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων



- ✓ να συγκρίνετε τις αριθμητικές τιμές οι οποίες προκύπτουν κατά τη λύση του προβλήματος με τιμές από βάσεις δεδομένων (βιβλία, Internet)
- ✓ να εξετάζετε τη διαδικασία επίλυσης χρησιμοποιώντας μια διαφορετική αρχική τιμή και εξετάζοντας το αποτέλεσμα του νέου υπολογισμού
- ✓ να επαληθεύετε την εξίσωση: να αντικαθιστάτε τη λύση του προβλήματος στην εξίσωση η οποία περιγράφει το πρόβλημα και να βεβαιωνόσαστε ότι η εξίσωση επαληθεύεται.

Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων



- ✓ να εκτιμάτε την τάξη μεγέθους της αριθμητικής λύσης του προβλήματος: να εκτιμάτε την τάξη μεγέθους της λύσης του προβλήματος κάνοντας κατάλληλες προσεγγίσεις και να βεβαιωνόσαστε ότι η ακριβής λύση βρίσκεται κοντά στην προσεγγιστική λύση.
- Η διαδικασία της εκτίμησης της τάξης μεγέθους έχει ως εξής:



Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων

- Έστω μια αριθμητική παράσταση της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή:

$$\frac{(36.720) \cdot (0,0624)}{0,000478}$$

- Αντικαθιστούμε όλες τις αριθμητικές ποσότητες με ακέραιες προσεγγιστικές τιμές χρησιμοποιώντας δυνάμεις του 10, π.χ.:
- ✓ $36.720 \rightarrow 40.000 \text{ ή } 4 \times 10^4$
- ✓ $0,0624 \rightarrow 6 \times 10^{-2}$
- ✓ $0,000478 \rightarrow 5 \times 10^{-4}$



Εκτίμηση της τάξης μεγέθους

- Κάνουμε τις αριθμητικές πράξεις με τους αριθμούς οι οποίοι προκύπτουν μετά τις προσεγγίσεις.
- Συνεχίζουμε να στρογγυλοποιούμε τις τυχόν ενδιάμεσες τιμές οι οποίες προκύπτουν, π.χ.:



Εκτίμηση της τάξης μεγέθους

$$\frac{(36.720) \cdot (0,0624)}{0,000478} \approx \frac{(4 \times 10^4) \cdot (6 \times 10^{-2})}{5 \times 10^{-4}} \approx 5 \times 10^{(4-2+4)} \\ \approx 5 \times 10^6$$

- Η τιμή η οποία προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων είναι: $4,79 \times 10^6$.
- Αν βρείτε αυτή τη λύση, η οποία είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την προσεγγιστική λύση, τότε έχετε μια επιπλέον **βεβαιότητα** ότι δεν έχετε κάνει κάποιο σημαντικό λάθος.



Εκτίμηση της τάξης μεγέθους

- Αν ένας αριθμός σε ένα άθροισμα ή μία διαφορά είναι πολύ μικρότερος από τους υπόλοιπους τότε μπορεί να παραληφθεί, π.χ.:

$$\frac{1}{4,13 + \cancel{0,04762}} \approx \frac{1}{4} \approx 0,25$$

- Η τιμή η οποία προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων είναι: 0,239.



Επιβεβαίωση των λύσεων των προβλημάτων

- **Να ελέγχετε αν το αποτέλεσμα είναι λογικό:**
- Αν για παράδειγμα υπολογίσετε ότι:
 - ✓ η ταχύτητα ροής ενός υγρού μέσα σε ένα σωλήνα είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου (340 m/s)
 - ✓ η θερμοκρασία ενός σώματος είναι μεγαλύτερη από την θερμοκρασία του ήλιου (περίπου 6000 K)
 - ✓ το pH ενός υδατικού διαλύματος είναι 340,25 (το pH κυμαίνεται από 0 έως 14)
 - ✓ το μήκος κύματος της ορατής ακτινοβολίας είναι της τάξης των km, ενώ στην πραγματικότητα είναι της τάξης των nm
- ... **τότε προφανώς έχει γίνει κάποιο λάθος!!!**

Άσκηση 2.24



- Να εκτιμήσετε την τάξη μεγέθους της τιμής του x στην παρακάτω εξίσωση:

$$x = \left(\frac{254}{0,879 \cdot 62,4} + \frac{13}{0,866 \cdot 62,4} \right) \times \frac{1}{31,3145 \cdot 60}$$

- Απάντηση:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{254}{0,879 \cdot 62,4} + \frac{13}{0,866 \cdot 62,4} \right) \times \frac{1}{31,3145 \cdot 60} \approx \\ &\left(\frac{250}{1 \cdot 60} + \frac{10}{1 \cdot 60} \right) \times \frac{1}{30 \cdot 60} \approx \left(4 + \frac{1}{6} \right) \times \frac{1}{1800} \approx \frac{4}{2 \times 10^3} \approx 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

- Η τιμή η οποία προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων είναι: $2,59 \times 10^{-3}$

Άσκηση 2.25



- Σύμφωνα με το ατομικό πρότυπο του Bohr, οι επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες στο άτομο του υδρογόνου δίνονται από τη σχέση:

$$E = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (2.7) \quad \text{με} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (2.8)$$

- ✓ m: μάζα ηλεκτρονίου, $m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ Kg}$
- ✓ k: σταθερά Coulomb, $k = 8,988 \times 10^9 \text{ N} \times \text{m}^2/\text{C}^2$
- ✓ e: φορτίο του ηλεκτρονίου, $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- ✓ h: σταθερά του Planck, $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \times \text{s}$
- ✓ n: κύριος κβαντικός αριθμός, τιμές: 1, 2, 3, ...

Άσκηση 2.25



➤ Να υπολογίσετε την ενέργεια στο άτομο του υδρογόνου και να εκτιμήσετε αν η τάξη μεγέθους των αποτελεσμάτων είναι σωστή όταν:

i. $n = 1$

ii. $n = 3$

Άσκηση 2.25



➤ Απάντηση: Εκτίμηση της τάξης μεγέθους:

$$E = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow E = -\frac{mk^2e^4}{2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow E = -\frac{2\pi^2mk^2e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

➤ Για $n = 1$ έχουμε E_1 :

$$E_1 \approx -\frac{2 \cdot 10 \cdot (9 \times 10^{-31}) \cdot (9 \times 10^9)^2 \cdot (2 \times 10^{-19})^4}{(7 \times 10^{-34})^2} \approx$$
$$-\frac{180 \cdot 81 \cdot 16}{49} \cdot \frac{10^{-31} \cdot 10^{18} \cdot 10^{-76}}{10^{-68}} \approx -\frac{200 \cdot 100 \cdot 15}{50} \cdot 10^{-21} \approx$$
$$-6000 \cdot 10^{-21} \approx -6 \cdot 10^{-18}$$

Άσκηση 2.25



➤ Μονάδες:

➤ Υπενθύμιση: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ και $1 \text{ J} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$

$$\frac{\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right)^2 \cdot \text{C}^4}{(\text{J} \cdot \text{s})^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{N}^2 \cdot \text{m}^4}{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right)^2 \cdot \text{m}^4}{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2} =$$

$$\frac{\text{kg}^3 \cdot \text{m}^6}{\text{J}^2 \cdot \text{s}^6} = \frac{1}{\text{J}^2} \cdot \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \right)^3 = \frac{\text{J}^3}{\text{J}^2} = \text{J}$$

➤ Άρα για $n = 1$ εκτιμάται ότι $E_1 = -6 \times 10^{-18} \text{ J}$

Άσκηση 2.25



➤ Απάντηση: Πραγματική τιμή για $n = 1$:

$$E_1 = - \frac{2 \cdot 9,870 \cdot (9,109 \times 10^{-31}) \cdot (8,988 \times 10^9)^2 \cdot (1,602 \times 10^{-19})^4}{(6,626 \times 10^{-34})^2} =$$
$$- \frac{2 \cdot 9,870 \cdot 9,109 \cdot 8,988^2 \cdot 1,602^4}{6,626^2} \cdot \frac{10^{-31} \cdot 10^{18} \cdot 10^{-76}}{10^{-68}}$$
$$= -2179 \cdot 10^{-21} \Leftrightarrow E_1 = -2,179 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

➤ Απάντηση: Πραγματική τιμή για $n = 3$:

$$E_3 = E_1 \cdot \frac{1}{3^2} = - \frac{2,179 \cdot 10^{-18}}{9} \Leftrightarrow E_3 = -2,421 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Άσκηση 2.26



- Ένας καθηγητής Πανεπιστημίου ισχυρίζεται ότι έχει διαβάσει τόσα πολλά βιβλία στη ζωή του ώστε αν τα τοποθετήσει το ένα πάνω στο άλλο φτάνουν μέχρι το φεγγάρι!!!
- Να εκτιμήσετε πόσα βιβλία έχει διαβάσει αυτός ο, κατά γενική ομολογία, πολυδιαβασμένος καθηγητής!!!
- Δίνεται ότι η μέση απόσταση μεταξύ της Γης και της Σελήνης ισούται με περίπου 30 φορές τη διάμετρο της Γης, ενώ η μέση ακτίνα της Γης είναι 6370 km.

Άσκηση 2.26



- Απάντηση:
- Η απόσταση Γης-Σελήνης είναι κατά προσέγγιση:

$$30 \times 2 \times 6370 \text{ km} = 382.200 \text{ km}$$

- Δηλαδή περίπου $4 \times 10^5 \text{ km}$ ή $4 \times 10^{10} \text{ cm}$
- Έστω ότι το πάχος κάθε βιβλίου είναι κατά μέσο όρο περίπου 4 cm .
- Άρα ο καθηγητής έχει διαβάσει:

$$\frac{4 \times 10^{10}}{4} = 10^{10} \text{ βιβλία} \quad \text{δηλαδή περίπου } 10 \text{ δισεκατομμύρια βιβλία!!!}$$

Άσκηση 2.27



- Η καταστατική εξίσωση των πραγματικών αερίων δίνεται από την εξίσωση van der Waals:

$$\left(P + \frac{n^2 \alpha}{V^2} \right) \cdot (V - nb) = nRT \quad (2.4)$$

- ✓ όπου P : η πίεση του αερίου
- ✓ V : ο όγκος του δοχείου
- ✓ T : η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin
- ✓ n : τα moles του αερίου
- ✓ R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων
- ✓ α και b : σταθερές

Άσκηση 2.27



➤ Δίνονται:

$$a = 3,607 \frac{\text{L}^2 \cdot \text{atm}}{\text{mol}^2} \quad b = 42,86 \times 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{mol}$$

$$R = 0,08206 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 \quad K = 273,15 + ^\circ\text{C}$$

➤ Να υπολογίσετε την πίεση την οποία ασκούν 50,00 moles ενός πραγματικού αερίου τα οποία βρίσκονται σε δοχείο όγκου 10,00 L στους 25,00 °C.

Άσκηση 2.28



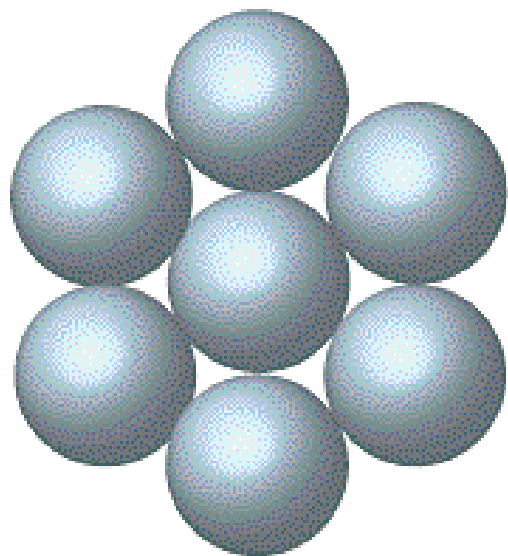
- Να εκτιμήσετε πόσες μπάλες του τένις χωράνε μέσα στο δωμάτιό σας όταν αυτό είναι άδειο.
- **Απάντηση:** Έστω ότι οι διαστάσεις του δωματίου είναι: μήκος $\times$ πλάτος $\times$ ύψος $= 4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$.
- Άρα ο όγκος του δωματίου είναι κατ' εκτίμηση $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 36 \text{ m}^3$.

Άσκηση 2.28



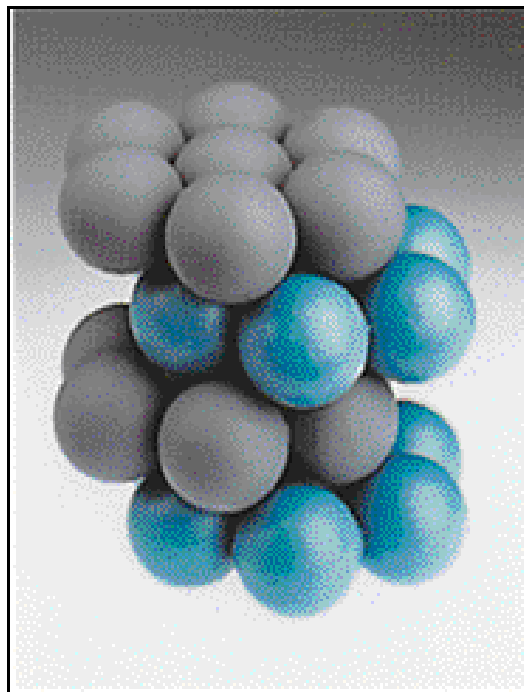
- Επίσης, εκτιμάται ότι η μπάλα του τένις έχει διάμετρο περίπου 7 cm (στην πραγματικότητα είναι περίπου 6,7 cm).
- Άρα: ακτίνα $r = 3,5 \text{ cm} = 0,035 \text{ m}$, άρα ο όγκος είναι:
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (0,035 \text{ m})^3 = 1,795 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$
- δηλαδή περίπου $1,80 \times 10^{-4} \text{ m}^3$.
- Οι μπάλες του τένις καθώς θα τοποθετηθούν μέσα στο δωμάτιο θα αφήσουν ένα κενό όγκο, ο οποίος εκτιμάται ότι θα είναι περίπου το 20-25% του συνολικού όγκου της αίθουσας.

Άσκηση 2.28

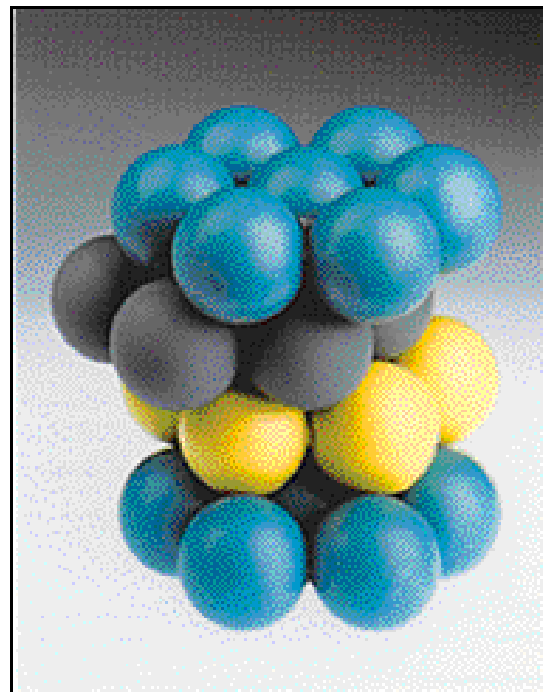


Close-packed
layer of spheres

(a)



(b)



(c)

Άσκηση 2.28



Άσκηση 2.28



Άσκηση 2.28



- Άρα ο διαθέσιμος όγκος της αίθουσας εκτιμάται ότι θα είναι περίπου το 75% έως 80% του συνολικού όγκου, δηλαδή περίπου 27 έως 29 m³.
- Άρα μέσα στην αίθουσα εκτιμάται ότι μπορούν να τοποθετηθούν:

$$\frac{27 \text{ m}^3}{1,80 \times 10^{-4} \text{ m}^3} \approx 1,5 \times 10^5 \quad \text{έως} \quad \frac{29 \text{ m}^3}{1,80 \times 10^{-4} \text{ m}^3} \approx 1,6 \times 10^5$$

- δηλαδή περίπου 150 έως 160 χιλιάδες μπάλες του τένις!!!, δηλαδή της τάξης του 10⁵.

Άσκηση 2.29 (Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2015)



- Να υπολογίσετε κατ' εκτίμηση πόσες μπάλες ποδοσφαίρου χωράνε στο δωμάτιο σας όταν αυτό είναι άδειο.