

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

3^ο εξάμηνο

Διδάσκων: Δρ. Αθ. Στασινάκης

Ρυθμοί Εξέλιξης

- Πρόβλεψη εξέλιξης πληθυσμού (σχεδιασμός MEYA, MENY, XYTA...)
- Πρόβλεψη αύξησης μικροοργανισμών (σχεδιασμός βιοαντιδραστήρων...)
- Πρόβλεψη κατανάλωσης πόρων

Εκθετική Αύξηση

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = rN} \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int (r) dt$$

$$\ln N - \ln N_0 = rt \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = rt$$

$$\boxed{N = N_0 e^{rt}}$$

r = ταχύτητα αύξησης (χρόνος⁻¹)

N = ποσότητα / πληθυσμός τη χρονική στιγμή t

N_0 = ποσότητα / πληθυσμός τη χρονική στιγμή t_0

$$\frac{dw}{dt} = rN$$

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{w} = \int_0^t r dt$$

$$\ln(w) \Big|_{w_0}^w = r t \Big|_0^t$$

$$\ln(w) - \ln(w_0) = r(t - 0)$$

$$e^{\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)} = e^{r(t-0)}$$

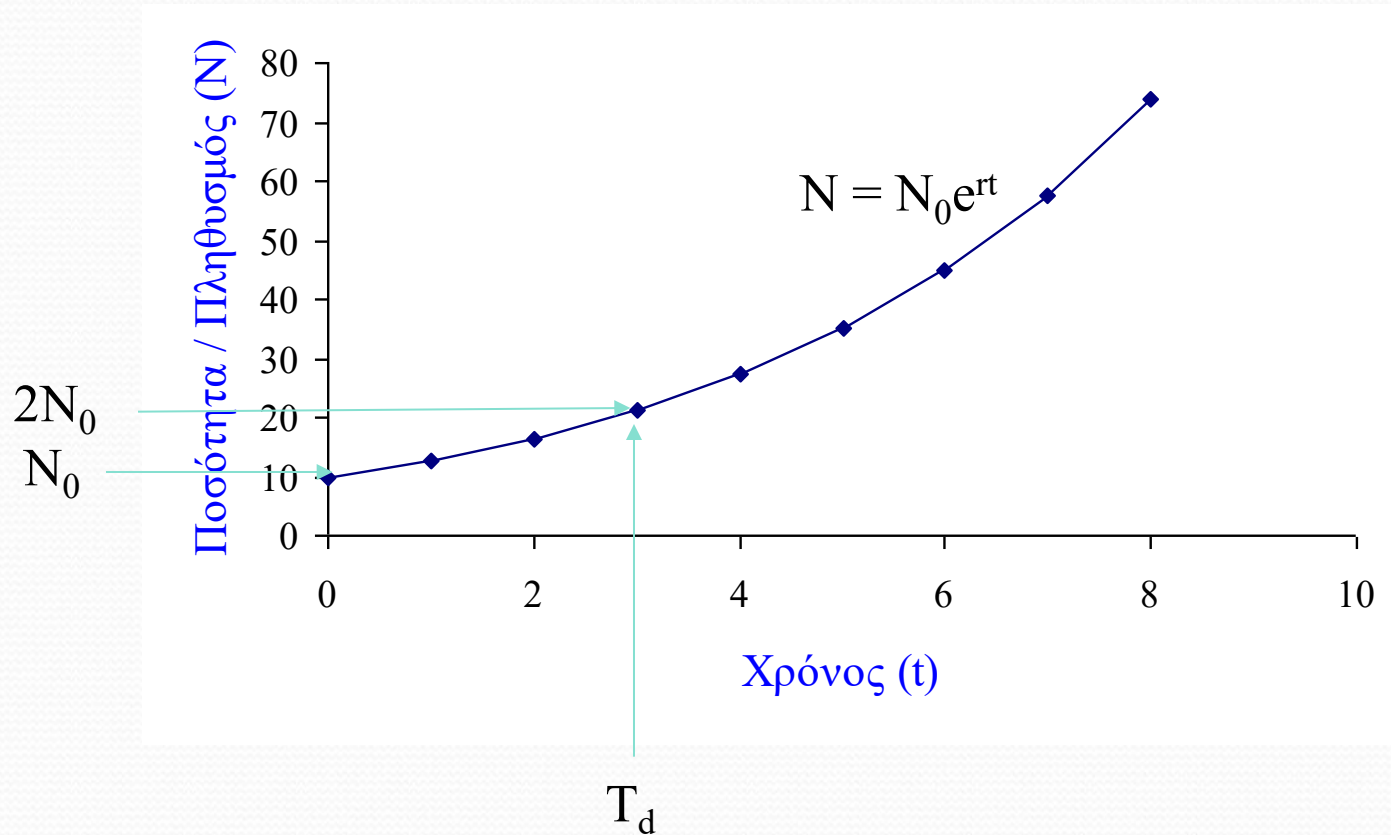
$$\underline{V} = e^{rt}$$

$$V_0$$

$$V_t = V_0 e^{rt} \quad (1)$$

$$\underline{V} = V_0 e^{rt} \quad (2)$$

Εκθετική Αύξηση



Παράδειγμα 2.1

Εκθετική Αύξηση

Υπολογισμός χρόνου διπλασιασμού, T_d

$$\text{για } N = 2N_0 \quad N = N_0 e^{rT_d} \quad \Rightarrow$$

$$2 N_0 = N_0 e^{rT_d} \quad \Rightarrow$$

$$\ln 2 = r T_d \quad \Rightarrow$$

$$T_d = \frac{0,693}{r}$$

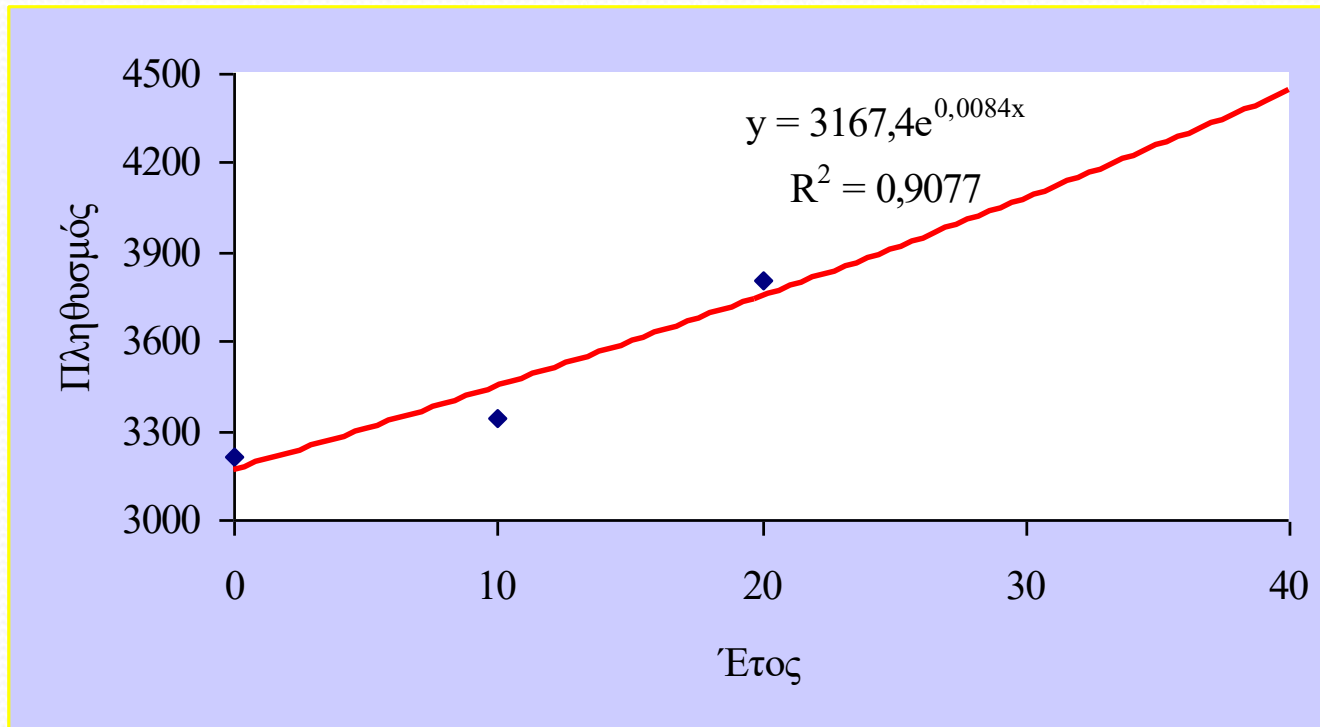
Εκτίμηση πληθυσμού για σχεδιασμό συστήματος επεξεργασίας ΥΑ Δήμου Θερμής

Βήμα 1: Συλλογή στοιχείων μόνιμου πληθυσμού (ΕΣΥΕ, <http://www.statistics.gr/>)

Δημοτικό Διαμέρισμα	1981	1991	2001
Λουτρόπολη Θερμής	3217	3341	3809
Κώμη	149	222	227
Μιστεγνά	693	620	905
Νέες Κυδωνίες	447	492	643
Πηγή	576	568	502
Πύργοι Θερμής	328	415	419
Σύνολο	3217	3341	3809

Εκτίμηση πληθυσμού για σχεδιασμό συστήματος επεξεργασίας ΥΑ Δήμου Θερμής

Βήμα 2: Υπολογισμός εξίσωσης που περιγράφει μεταβολή πληθυσμού



$$r = 0,0084$$

$$N_{2021} = 4432$$

Εκτίμηση πληθυσμού για σχεδιασμό συστήματος επεξεργασίας ΥΑ Δήμου Θερμής

Βήμα 3: Συλλογή στοιχείων εποχιακού πληθυσμού 2001 (ΕΣΥΕ, ΕΟΤ)

Δ. Διαμέρισμα	Εξοχ. Κατοικίες	Κλίνες Ξενοδ.	Κλίνες Ενοικ.
Λουτρόπολη Θερμής	165	131	563
Κώμη	6	0	0
Μιστεγνά	187	50	218
Νέες Κυδωνίες	83	27	0
Πηγή	64	0	0
Πύργοι Θερμής	93	68	0
Σύνολο	598	276	781

Εκτίμηση πληθυσμού για σχεδιασμό συστήματος επεξεργασίας ΥΑ Δήμου Θερμής

Βήμα 4: Υπολογισμός εποχιακού πληθυσμού 2021

$$N_0 = 1655$$

$$r = 0,0084$$

$$N = N_0 e^{rt}$$

$$N_{2021} = 1958 \text{ κάτοικοι}$$

Εκτίμηση πληθυσμού για σχεδιασμό συστήματος επεξεργασίας ΥΑ Δήμου Θερμής

Βήμα 5: Υπολογισμός πληθυσμός σχεδιασμού (2021)

$$N_{2021} = 4432 + 1958 = 6390 \text{ κάτοικοι}$$

Εκθετική Μείωση

$$\frac{dN}{dt} = -KN \Rightarrow$$

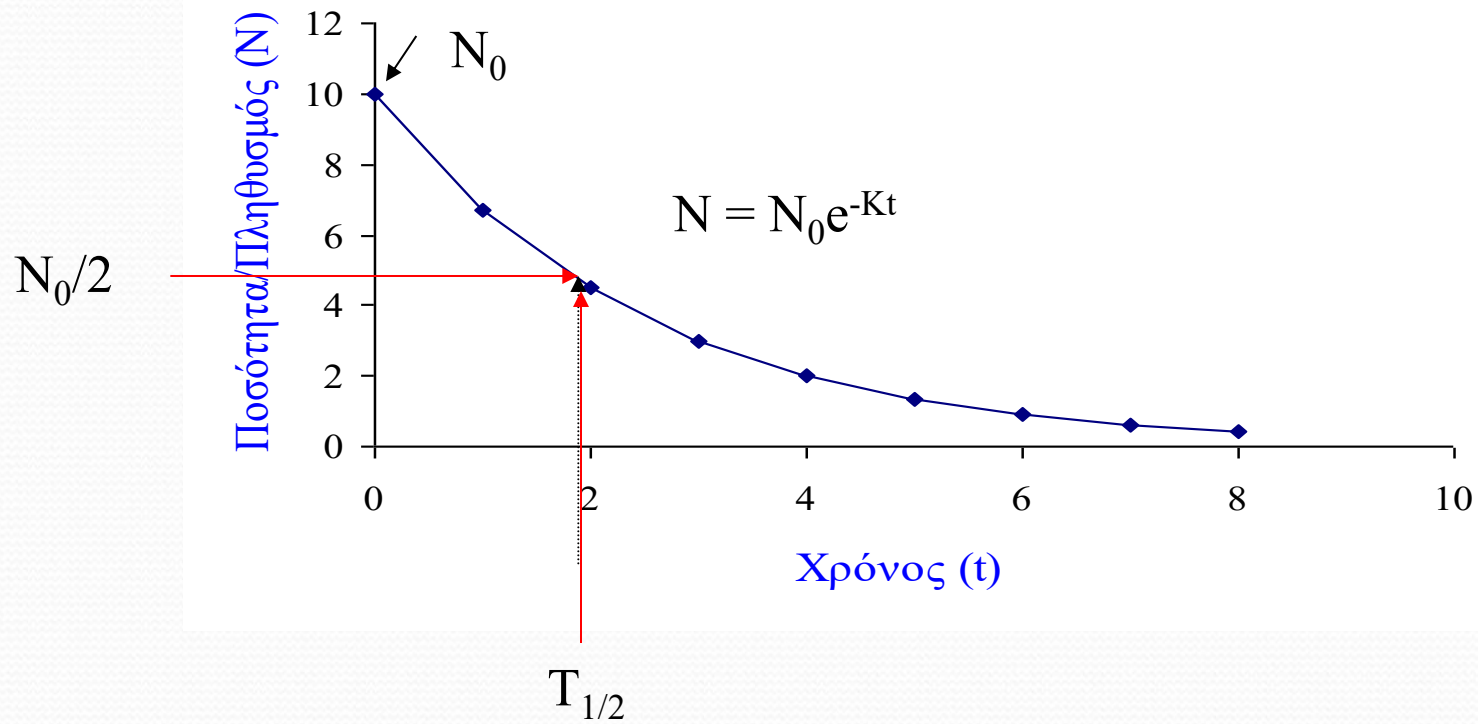
$$N = N_0 e^{-Kt}$$

K = ταχύτητα μείωσης (χρόνος⁻¹)

N = ποσότητα / πληθυσμός τη χρονική στιγμή t

N_0 = ποσότητα / πληθυσμός τη χρονική στιγμή t_0

Εκθετική Μείωση



Εκθετική Μείωση

Υπολογισμός χρόνου υποδιπλασιασμού, $T_{1/2}$

$$\text{για } N = N_0/2 \quad \blacktriangle \quad N = N_0 e^{-KT_{1/2}} \quad \Rightarrow$$

$$N_0/2 = N_0 e^{-KT_{1/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\ln 1/2 = -KT_{1/2} \quad \Rightarrow$$

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{K}$$

Παράδειγμα 2.2

3. (2 μονάδες) Ένας βιολόγος μελετά είδος βακτηρίων που ανακαλύφθηκε πρόσφατα. Τοποθετεί 1.000 από αυτά τα βακτήρια σ' ένα περιβάλλον που το θεωρεί κατάλληλο για την ανάπτυξή τους. Μετά από 10 ώρες παρατηρεί ότι ο αριθμός τους είναι 5.000. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των βακτηρίων είναι ανάλογος του υπάρχοντος πληθυσμού.

- (α) Να βρεθεί διαφορική εξίσωση που να εκφράζει το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των βακτηρίων σε σχέση με τον υπάρχοντα πληθυσμό, και στη συνέχεια να λυθεί.
- (β) Σε πόσες ώρες θα τριπλασιαστεί ο αριθμός των βακτηρίων;
- (γ) Πόσος αναμένεται να είναι ο πληθυσμός των βακτηρίων στο τέλος μιας βδομάδας; Ενός μήνα; Στο τέλος ενός χρόνου;

(α)

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N$$
$$\Rightarrow N = N_0 e^{rt}$$

Δωδωμένα

$$N = 5000$$

$$N_0 = 1000$$

$$t = 10 \text{ hr}$$

Ζητούμενα

$$r = ?$$

$$\frac{5000}{1000} = \frac{10000}{1000} e^{r \cdot 10}$$

$$\ln S = \ln E^{r \cdot 10}$$

$$\frac{\ln S}{10} = \frac{r \cdot 10}{10}$$

$$r = 0,16 = 16\%$$

e) $5000 \rightarrow 10h$

$$X \leftarrow 3,42h$$

$$\frac{5000 \cdot 3,42}{10} \Rightarrow X = 1710$$

Ρυθμοί Εξέλιξης

- Πρόβλεψη χρήσης ορυκτών πόρων (φαινόμενο θερμοκηπίου)
- Πρόβλεψη μεταβολής δασικών εκτάσεων (φαινόμενο θερμοκηπίου)
- Πρόβλεψη μεταβολής οικονομικής κατάστασης πληθυσμού (φαινόμενο θερμοκηπίου)

Εκθετική Αύξηση – Επίδραση περισσότερων παραγόντων

Εκτίμηση Εκπομπών C:

Εκπομπές C =

Πληθυσμός $\times$ (Δαπανούμενη Ενέργεια / Άτομο) $\times$ (Άνθρακας / Δαπανούμενη Ενέργεια)

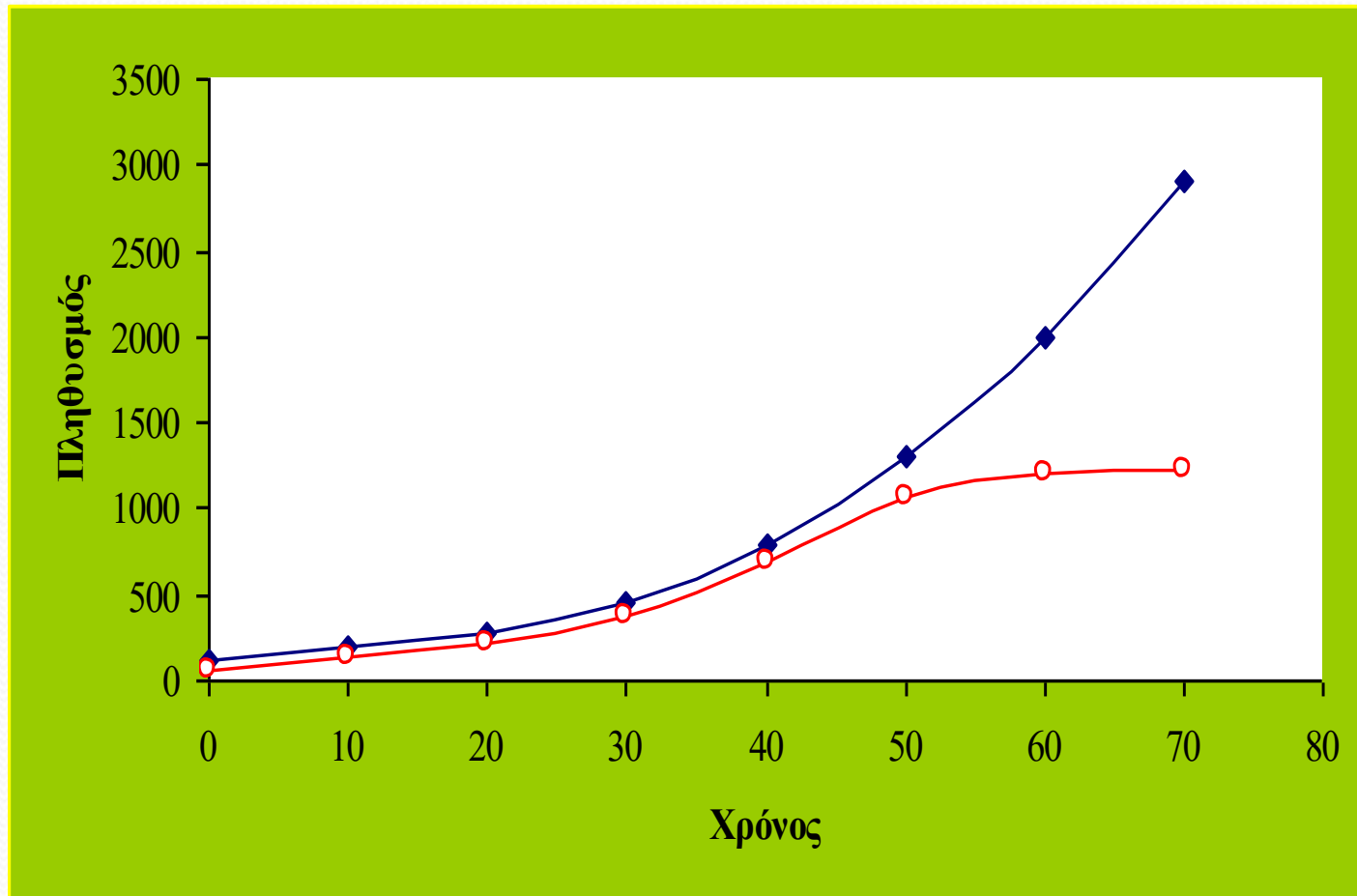
$$N = (N_1 e^{K_1 t}) \times (N_2 e^{K_2 t}) \times (N_3 e^{K_3 t}) \Rightarrow$$

$$N = (N_1 N_2 N_3) e^{(K_1 + K_2 + K_3)t}$$

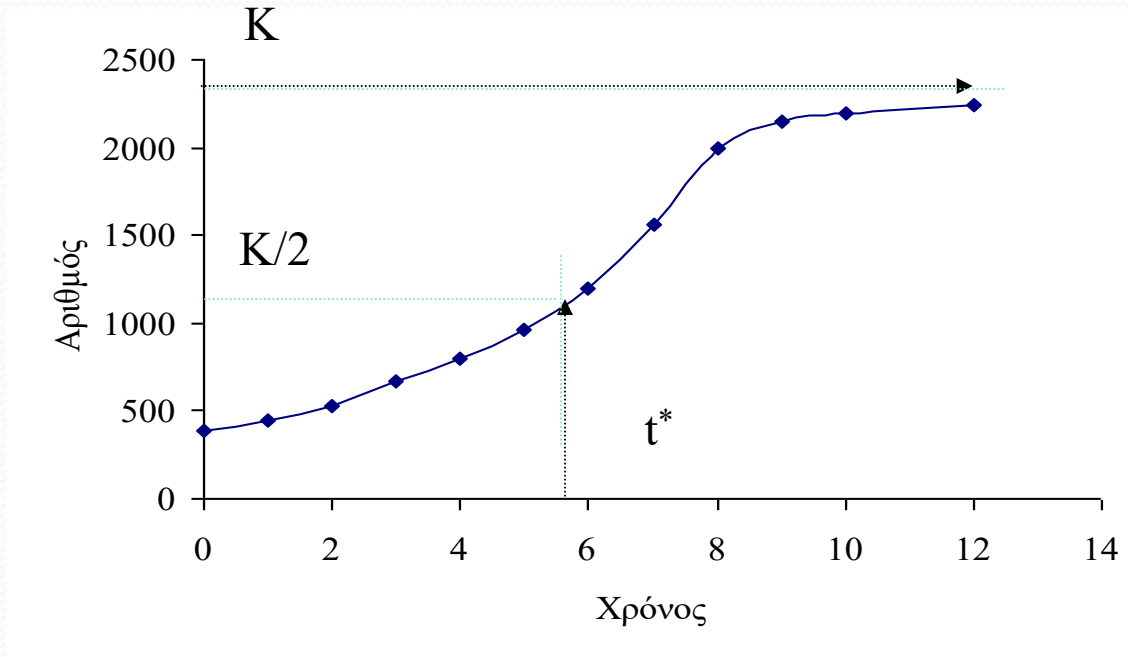
$$\begin{array}{ccc} \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow \\ N_0 & & K \end{array}$$

Παράδειγμα 2.3

Αδυναμία περιγραφής αύξησης πληθυσμού με εκθετική αύξηση



Αύξηση Πληθυσμού – Λογιστική ή Σιγμοειδής Καμπύλη



$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$N \ll K$ δηλαδή $N/K=0$ τότε $dN/dt = rN$

$N=K$ δηλαδή $N/K=1$ τότε $dN/dt=0$

N = πληθυσμός

K = φέρουσα ικανότητα συστήματος

r = εκθετικός ρυθμός αύξησης όταν $N < K$

Αύξηση Πληθυσμού – Λογιστική ή Σιγμοειδής Καμπύλη

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \Rightarrow$$

$t^* = \text{χρόνος όπου } N=K/2$

$$N = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t^*)}} \quad \Rightarrow$$

$$t = t^* - \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K}{N} - 1\right)$$

Αύξηση Πληθυσμού – Λογιστική ή Σιγμοειδής Καμπύλη

$$N = N_0 e^{+rt}$$

$$N = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t^*)}} \Rightarrow$$

Για $t = 0$ προκύπτει

$$t^* = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)$$

t^* = χρόνος όπου $N=K/2$

N_0 = πληθυσμός τη χρονική στιγμή $t=0$

Αύξηση Πληθυσμού – Λογιστική ή Σιγμοειδής Καμπύλη

Αν R_0 ο στιγμιαίος ρυθμός αύξησης σε $t=0$ όπου η αύξηση είναι εκθετική, ισχύει:

$$\frac{dN}{dt} = R_0 \times N_0$$

Επίσης ισχύει,

$$\frac{dN}{dt} = rN_0\left(1 - \frac{N_0}{K}\right)$$

Άρα

$$r = \frac{R_0}{\left(1 - \frac{N_0}{K}\right)}$$

Παράδειγμα 2.6

2. Υποθέστε ότι ο πληθυσμός της πόλης της Μυτιλήνης αυξάνεται από 33.000 κατοίκους το 2022 σε έναν τελικό πληθυσμό των 60.000 κατοίκων ακολουθώντας τη λογιστική καμπύλη. Θεωρώντας ότι ο ρυθμός αύξησης το 2022 ήταν $1,0\%$, τότε ο πληθυσμός θα φθάσει τους 50.000 κατοίκους;

$$r = 0,01$$

$$N = N_0 e^{rt}$$

Β τρόπος

$$r = \frac{R_0}{1 - \frac{N_0}{K}} = \frac{0,01}{1 - \frac{33000}{60000}} \Rightarrow$$

$$r = 0,02$$

$$t = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{N(K - N_0)}{N_0(K - N)} \right)$$

$$t = \frac{1}{0,02} \ln \left(\frac{50000(6000 - 33000)}{33000(6000 - 50000)} \right)$$

$$t = 41,55 \text{ years}$$

$$W = 7,5$$

$$W_0 = 6,6$$

$$r = 1,2\% = 0,012$$

$$W = W_0 e^{rt}$$

$$\frac{7,5}{6,6} = \frac{6,6 e^{0,012 t}}{6,6}$$

$$\frac{\ln 1,13}{0,012} = \frac{0,012 t}{0,012}$$

3] Υποθέστε ότι μια καλλιεργούμενη έκταση μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο τεσσάρων παραγόντων:

$$\text{Έκταση} = (\text{έκταση/τροφή}) \times (\text{τροφή/kcal}) \times (\text{kcal/άτομο}) \times (\text{πληθυσμός})$$

Οι ετήσιοι ρυθμοί αύξησης για κάθε παράγοντα είναι: (1) η έκταση που απαιτείται ανά μονάδα ποσότητας παραγόμενης τροφής, -1% (λόγω αύξησης της παραγωγικότητας ανά μονάδα καλλιεργούμενης έκτασης). (2) η ποσότητα παραγόμενης τροφής ανά διατροφική θερμίδα που καταναλώνεται από τον άνθρωπο, $+0,5\%$ (επειδή με την αυξανόμενη ευμάρεια οι άνθρωποι καταναλώνουν περισσότερα ζωικά προϊόντα, με αποτέλεσμα τη μείωση της αποδοτικότητας χρήσης γης). (3) η κατανάλωση θερμίδων ανά άτομο, $+0,1\%$, και (4) το μέγεθος του πληθυσμού, $+1,5\%$. Με αυτούς τους ρυθμούς αύξησης πόσος χρόνος απαιτείται για τον διπλασιασμό της απαιτούμενης καλλιεργούμενης έκτασης;

$$N = N_0 e^{rt}$$

$$r_{\text{ολικό}} = -1 + 0,5 + 0,1 + 1,5 \\ = 1,1\%$$

$$N = 2N_0$$

$$2N_0 = N_0 e^{0,011 t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0,011 t}$$

$$\ln 2 = 0,011 t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,011} = 63$$

Χρήση Φυσικών Πόρων

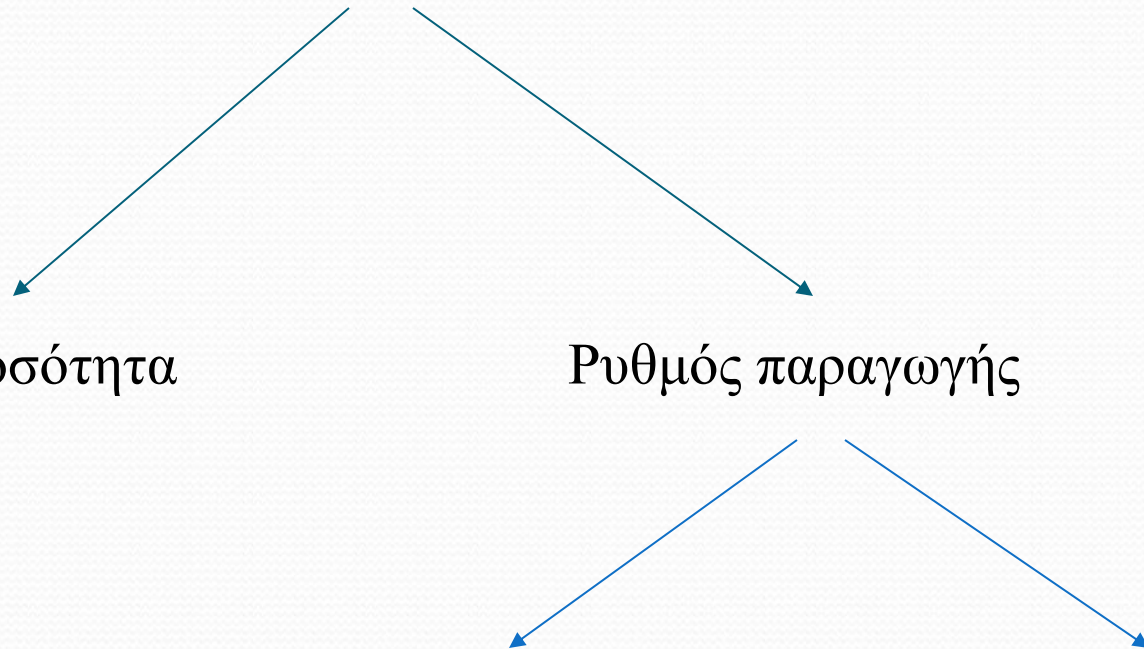
Χρόνος ύπαρξης φυσικών πόρων

Συνολική ποσότητα

Ρυθμός παραγωγής

Εκθετική Αύξηση

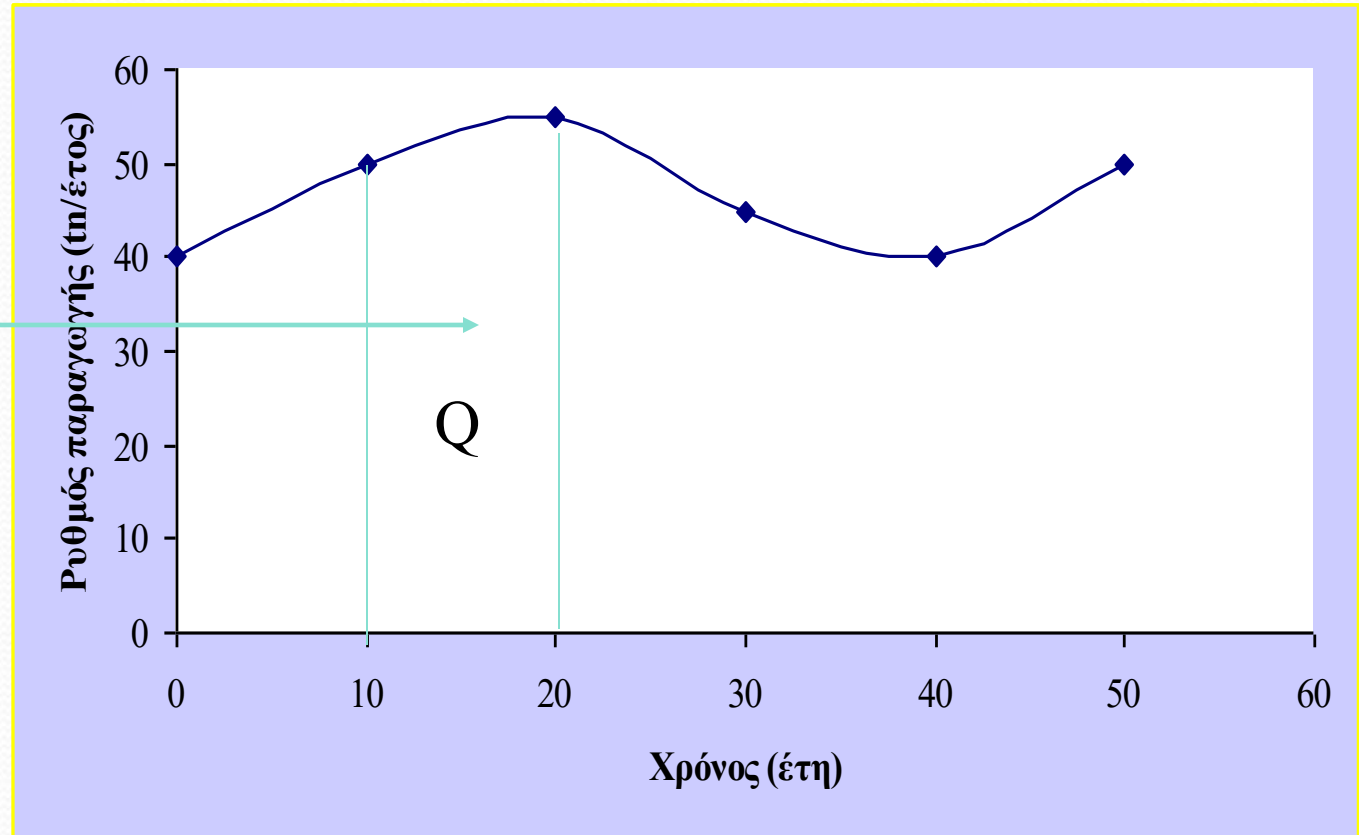
Καμπύλη Gauss



Χρήση φυσικών πόρων

Συνολικό ποσό
που παράχθηκε

$$Q = \int P dt$$

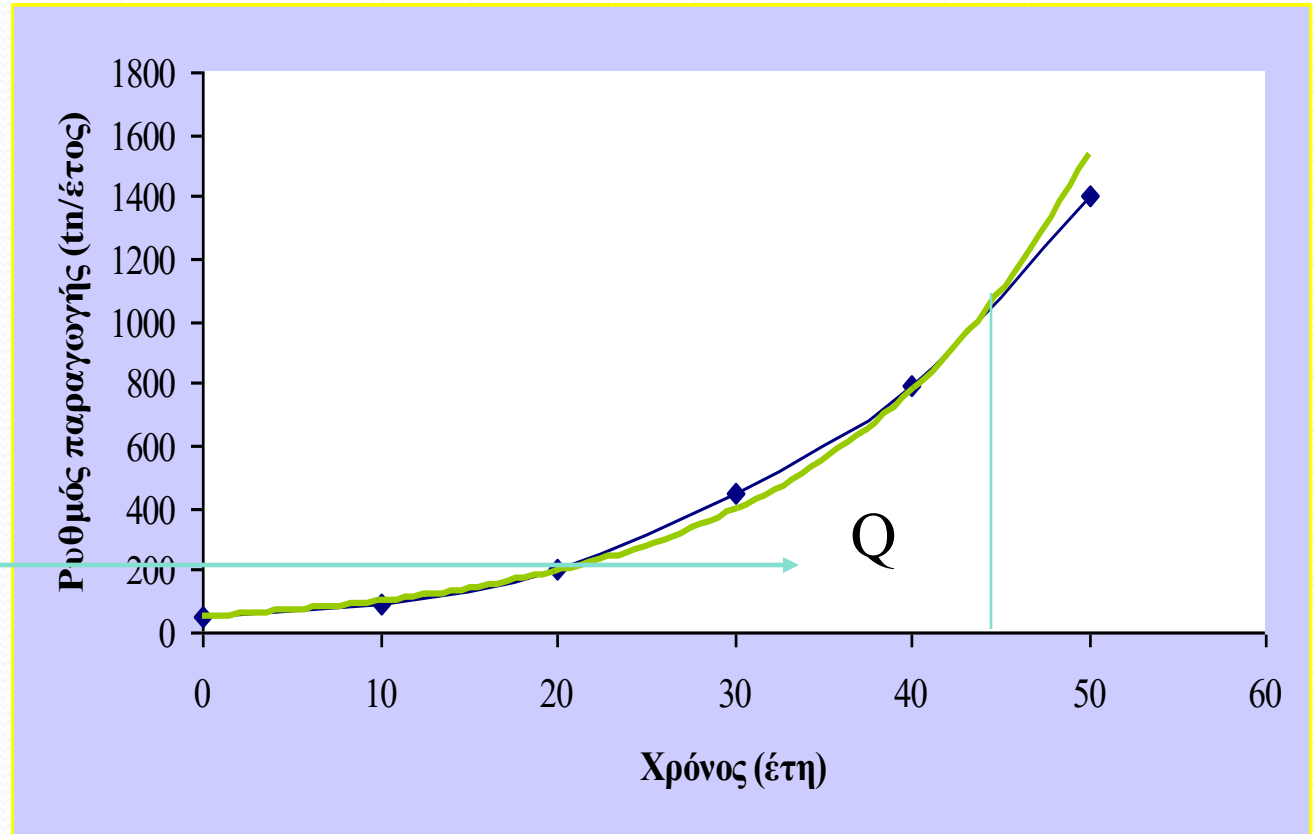


Ρυθμός παραγωγής πόρου => Εκθετική Αύξηση

Συνολικό ποσό
που παράχθηκε

$$Q = \int P dt$$

$$P = P_0 e^{rt}$$



Ρυθμός παραγωγής πόρου => Εκθετική Αύξηση

Συνολικό ποσό
που παράχθηκε

$$\longrightarrow Q = \int P dt \quad \Rightarrow$$

$$Q = \int P_0 e^{rt} dt \quad \Rightarrow$$

$$Q = \frac{P_0}{r} (e^{rt} - 1)$$

Q = συνολική παραγωγή του πόρου από τη χρονική στιγμή 0 έως t (τόνοι, βαρέλια...)

P_0 = αρχικός ρυθμός παραγωγής (τόνοι/έτος, βαρέλια/ημέρα....)

r = εκθετικός ρυθμός αύξησης παραγωγής (έτος⁻¹)

Ρυθμός παραγωγής πόρου => Εκθετική Αύξηση

$$Q = \frac{P_0}{r} (e^{rt} - 1)$$

=>

$$T = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{rQ}{P_0} + 1\right)$$

T = χρόνος για την παραγωγή ποσότητας Q (έτη)

✓
→ ποσότητα
→ η ποσότητα
χω έχω
τώρα

Παράδειγμα 2.4

14 Τα παγκόσμια αποθέματα χρωμίου είναι περίπου 800 εκατομμύρια αμερικανικοί τόνοι, και η παρούσα κατανάλωση είναι περίπου 2 εκατομμύρια αμερικανικοί τόνοι ανά έτος. Εάν ο ρυθμός κατανάλωσης χρωμίου αυξάνεται εκθετικά με σταθερό ρυθμό 2,6 τοις εκατό ανά έτος, σε πόσο χρόνο θα εξαντληθούν τα παρόντα αποθέματα; Υποθέστε ότι οι συνολικοί πόροι είναι πενταπλάσιοι των παρόντων αποθεμάτων· εάν ο ρυθμός κατανάλωσης συνεχίσει να αυξάνεται με 2,6 τοις εκατό, σε πόσο χρόνο θα εξαντληθούν

Λύση

$$r = 2,6\% = 0,026$$

$$T = \frac{1}{0,026} \ln \left(\frac{0,026 \cdot 800\,000\,000}{2\,000\,000} + 1 \right)$$

$$T = 93,47 \text{ years}$$

Επίδραση r στην κατανάλωση αποθεμάτων C

$P_o = 5 \times 10^9$ τόνοι/έτος

$r(\%)$	500×10^9 τόνοι C	2000×10^9 τόνοι C
0	100 (έτη)	400 (έτη)
1	69 (έτη)	160 (έτη)
2	55 (έτη)	109 (έτη)
3	46 (έτη)	85 (έτη)
4	40 (έτη)	71 (έτη)
5	35 (έτη)	61 (έτη)

Έτη που απαιτούνται για την κατανάλωση όλων των αποθεμάτων C του πλανήτη

Χρήση Φυσικών Πόρων

Αποθέματα (reserves): ποσότητες υλικού που μπορούν να ανακτηθούν με την υπάρχουσα τεχνολογία και τις οικονομικές συνθήκες

Πόροι (resources): συνολικές ποσότητες υλικού ανεξάρτητα από τη δυνατότητα ανάκτησής τους

Χρήση φυσικών πόρων

Αποθέματα πετρελαίου 1970: 550×10^9 βαρέλια

$P_{1970} = 17 \times 10^9$ βαρέλια

Κατανάλωση σε
32 χρόνια

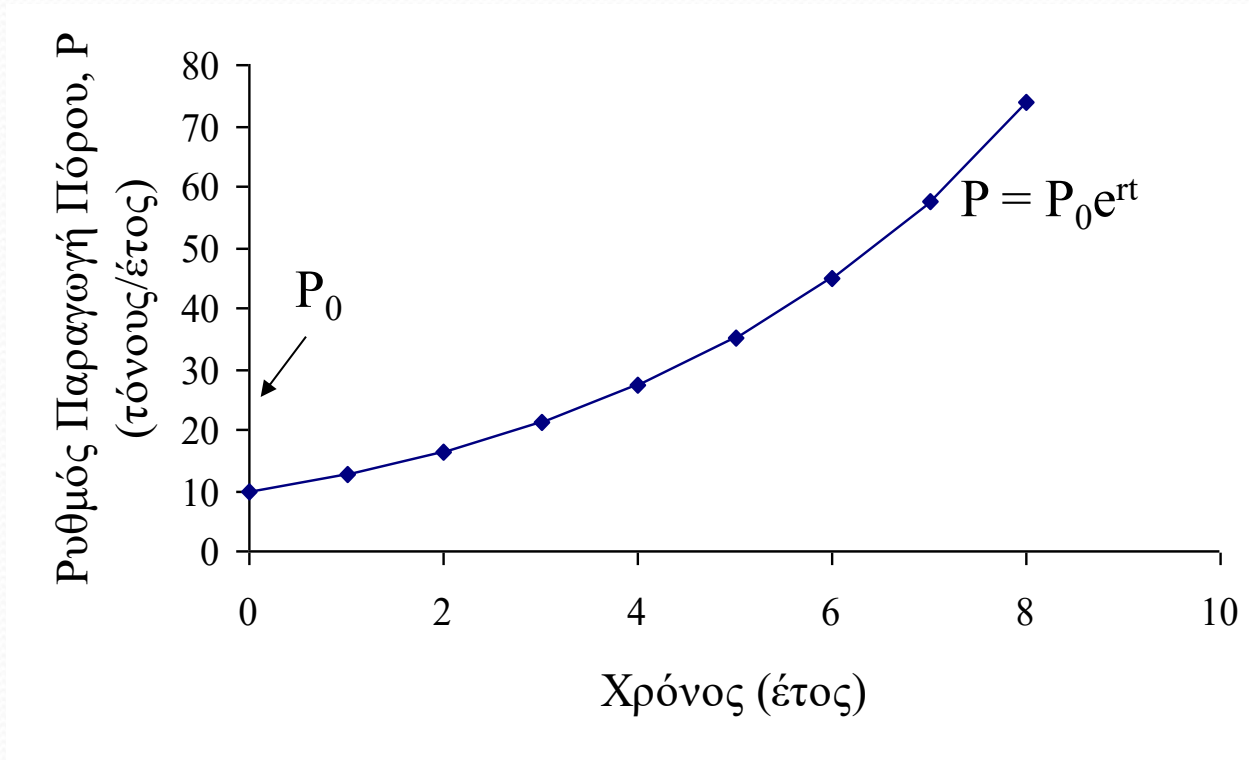
Αποθέματα πετρελαίου 1995: 1000×10^9 βαρέλια

$P_{1995} = 22,5 \times 10^9$ βαρέλια

Κατανάλωση σε
45 χρόνια

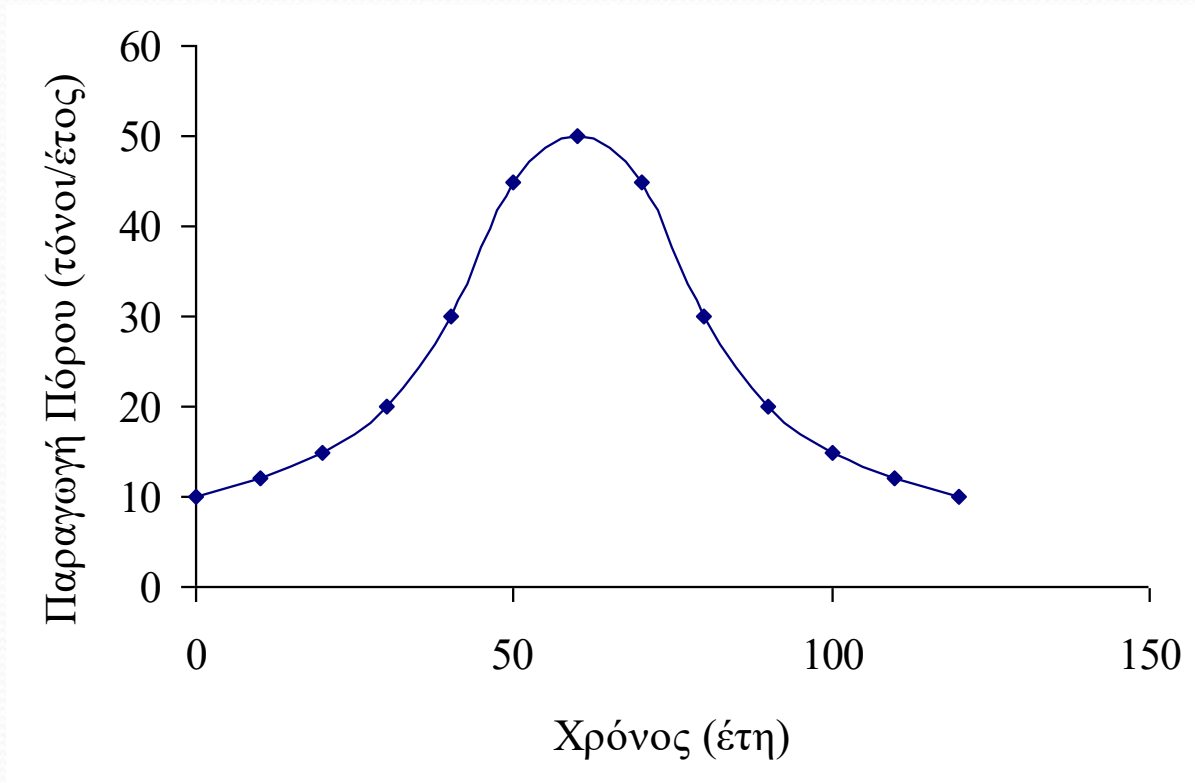
Εκτίμηση χρόνου εξάντλησης βάση αποθεμάτων => παρακινδυνευμένη

Χρήση Φυσικών Πόρων – Εκθετική Αύξηση



Αδυναμία μοντέλου: Μία μέρα πριν την εξάντληση των αποθεμάτων η βιομηχανία να βρίσκεται σε φάση μέγιστης παραγωγής και στη συνέχεια να αναστείλει τη λειτουργία της

Χρήση Φυσικών Πόρων – Καμπύλη Gauss



- Αρχικά εκθετική αύξηση χρήσης πόρου λόγω αφθονίας και χαμηλής τιμής του
- Μείωση ρυθμών χρήσης πόρου λόγω μείωσης των αποθεμάτων και αύξησης της τιμής του

Χρήση Φυσικών Πόρων – Καμπύλη Gauss

$$P = P_m \times e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - t_m}{\sigma} \right)^2 \right]}$$

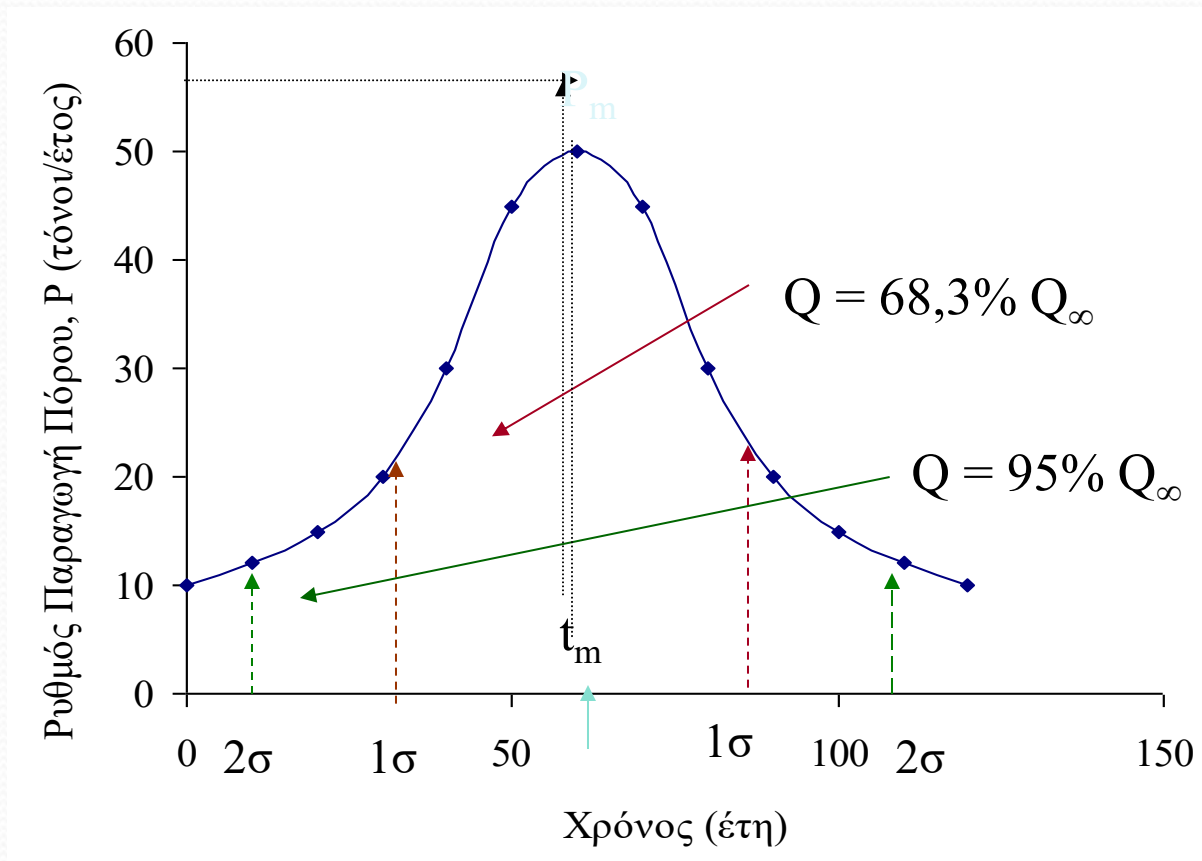
P = ρυθμός παραγωγής πόρου (τόνοι/έτος)

P_m = μέγιστος ρυθμός παραγωγής (τόνοι/έτος)

t_m = χρόνος κατά τον οποίο ο ρυθμός παραγωγής είναι μέγιστος (έτη)

σ = τυπική απόκλιση (έτη)

Χρήση Φυσικών Πόρων – Καμπύλη Gauss



Χρήση Φυσικών Πόρων – Καμπύλη Gauss

$$Q_{\infty} = \int P \dot{d}t = P_m \times e \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - t_m}{\sigma} \right)^2 \right] dt$$

$$Q_{\infty} = \sigma P_m \sqrt{2\pi}$$

Q_{∞} = συνολική παραγόμενη ποσότητα πόρου (τόνοι)

P_m = μέγιστος ρυθμός παραγωγής (τόνοι/έτος)

Χρήση Φυσικών Πόρων – Καμπύλη Gauss

$$P = P_m \times e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - t_m}{\sigma} \right)^2 \right]} \quad \text{για } t = 0$$

$$t_m = \sigma \sqrt{2 \ln \frac{P_m}{P_0}}$$

P_0 = αρχικός ρυθμός παραγωγής πόρου

Παράδειγμα 2.5